المحاضرة السابعة + الثامنة

الإثنين

8/10/2018

◄ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية ...

نظري ☑ عملي ☐

النواة المتردية (المتحللة) أو (المنفصلة):

تعريف النواة المتردية: نعلم أن معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني هي:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\cdot \varphi_0(t)\,dt$$

إذا تمكنا من كتابة نواة المعادلة التكاملية بالشكل:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k(x)\cdot b_k(t)$$

حيث: الدوال $a_1(x), a_2(x), \dots a_n(x)$ مستقلة خطياً

والدوال $b_1(t), b_2(t), \dots b_n(t)$ مستقلة خطياً

والنواة $K(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع $D=\{a\le x\le b, a\le t\le b\}$

عندئذ: سمي النواة K بالنواة المتردية.

مثال: إن النواة $K(x,t) = x\ln t - t\ln x$ متردية، حيث $D=\{a\le x\le b, a\le t\le b\}$

نلاحظ أن النواة K أخذت الشكل:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=2} a_k(x)\cdot b_k(t)$$

$$= a_1(x)\cdot b_1(t) + a_2(x)\, b_2(t)$$

حيث: $a_1(x) = x \quad b_1(t) = \ln(t) \quad a_2(x) = \ln x \quad b_2(t) = -t$

وإن الدالتين a_1, a_2 مستقلتين خطياً، لأن: محدد رونسكي

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_1'(x) & a_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1 - \ln(x) \neq 0$$

Scanned by CamScanner

أيضاً الدالتين b_1, b_2 مستقلتين خطياً، لذلك:

$$A_2 = \begin{vmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_1'(t) & b_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(t) & -t \\ \frac{1}{t} & -1 \end{vmatrix} = -\ln t + 1 \neq 0$$

ويمكن التحقق من أن النواة $K(x,t)$ كولة تربيعياً على المربع D وذلك بتحقق الشروط الثلاثة المعروفة.

* استخدام النواة المتردية في حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني:

I - استنتاج صيغة الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة، وذلك باستخدام النواة المتردية:

نعلم أن معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة هي معادلة من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t).dt \quad \dots (1)$$

نفرض أن النواة في المعادلة (1) نواة متردية أي أنها تكتب بالشكل:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k(x).b_k(t) \quad \dots (2)$$

بتعويض (2) في (1):

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{k=n} a_k(x).b_k(t) \right].\psi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\,\psi(t).dt \quad \dots (3)$$

الآن لندخل المصطلحات التالية:

$$c_k = \int_a^b b_k(t).\psi(t).dt \quad \dots (4)$$

$$k = 1, 2, \dots n$$

حيث: c_k هي عبارة عن ثوابت مجهولة سنقوم بتحديدها لاحقاً

((لكون الدالة $\psi(t)$ مجهولة))

الآن لنعوض (4) في (3):

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k a_k(x) \quad (*)$$

Scanned by CamScanner

نبدل في المعادلة لأحيزة كل x بـ t ومن ثم نغير دليل التسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن نضع m عوضاً عن k فنجد :

$$\psi(t) = f(t) + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m \cdot a_m(t)$$

نعوض $\psi(t)$ في مصطلح c_k فنجد :

$$c_k = \int_a^b b_k(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m \cdot a_m(t) \right] dt$$

$$= \int_a^b b_k(t) f(t)\, dt + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m \int_a^b b_k(t) \cdot a_m(t)\, dt \quad \dots (5)$$

حيث : $m, k = 1, \dots n$

الآن لندخل المصطلحات التالية :

$$a_{km} = \int_a^b b_k(t) \cdot a_m(t) \quad , \quad f_k = \int_a^b b_k(t) \cdot f(t)\, dt$$

حيث : $m, k = 1, 2, \dots n$ ، لنعوض في (5)

$$\Rightarrow c_k = f_k + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m a_{km} \quad ; \quad k = 1, \dots n$$

نبدل في العلاقة لأحيزة كل m بـ k وكل k بـ m ونجد على :

$$c_m = f_m + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k a_{mk} \quad ; \quad m = 1, \dots n$$

أو $\boxed{f_m = c_m - \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k a_{mk}}$

ملاحظة : العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالشكل :

$$(**) \begin{cases} (1 - \lambda a_{11}) c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \dots - \lambda a_{1n} c_n = f_1 \\ -\lambda a_{21} c_1 + (1 - \lambda a_{22}) c_2 \dots - \lambda a_{2n} c_n = f_2 \\ \vdots \\ -\lambda a_{n1} c_1 - \lambda a_{n2} c_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn}) c_n = f_n \end{cases}$$

المجموعة السابقة يمكن كتابتها باستخدام رمز دلتا كرونيكر بالشكل :

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\delta_{mk} - \lambda a_{mk}) c_k = f_m \quad \dots (6)$$

حيث : $m = 1, 2, \dots n$

تذكرة

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = k \\ 0 & \text{if } m \neq k \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

إن (6) و (**) هي إلا جملة معادلات خطية مؤلفة من n معادلة بـ n مجهول C_k

أي أن معين (محدد) الأمثال لهذه الجملة هو:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

▲ عند الحالتين التاليتين:

1- إذا كان $\Delta(\lambda)\neq 0$ وهذا يعني أن جملة المعادلات الخطية حلاً وحيداً وهو: $(C_1, C_2, C_3 \dots C_n)$

والذي يؤدي إلى أن لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية عند المتباينة أيضاً حلاً وحيداً يعطى بالصيغة (*) التالية:

$$\psi(x)=\rho(x)+\lambda\sum_{k=1}^{k=n} C_k a_k(x)$$

وفي هذه الحالة نسمي λ قيمة غير مميزة للنواة $k(x,t)$

2- إذا كان $\Delta(\lambda)=0$ وهذا يعني أنه لا يوجد حل لجملة المعادلات التكاملية الخطية أو يوجد لها عدد غير منته من الحلول وعليه لا يكون لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية أي حل أو يكون لها عدد غير منته من الحلول وفي هذه الحالة نسمي λ قيمة مميزة للمعادلة التكاملية..

II- استنتاج صيغة حل لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتباينة وذلك باستخدام النواة المترددية:

نعلم أن معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني والمتباينة هي:

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\cdot\psi(t)\,dt=0 \quad \dots (1)$$

إذا أجرينا نفس الدراسة السابقة في حالة المعادلة غير المتباينة، سنحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

Scanned by CamScanner

$$(1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 - \dots - \lambda a_{1n}c_n = 0$$
$$-\lambda a_{21}c_1 + (1-\lambda a_{22})c_2 - \dots - \lambda a_{2n}c_n = 0$$
$$\vdots$$
$$-\lambda a_{n1}c_1 - \lambda a_{n2}c_2 - \dots + (1-\lambda a_{nn})c_n = 0$$

والجملة السابقة تكتب باستخدام دلتا كرونيكر بالشكل:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\delta_{mk} - \lambda a_{mk})c_k = 0 \quad \dots (2)$$

حيث: $m = 1,2,\dots n$

علماً أن: $\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{if } m=k \\ 0 & \text{if } m \neq k \end{cases}$

إن محين الأمثال للجملة السابقة هو:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

عبر الحالتين التاليتين:

1- إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ أي أن λ ليست قيمة مميزة لنواة المعادلة التكاملية $K(x,t)$

هذا يعني أن لجملة المعادلات الخطية حل وحيد وهو الحل الصفري

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

وبالتالي للمعادلة فريدهولم (1) حلاً وحيداً وهو الحل الصفري

$$\Rightarrow \psi(x) = 0$$

2- إذا كان $\Delta(\lambda) = 0$ أي أن λ قيمة مميزة لنواة المعادلة التكاملية $K(x,t)$ وهذا يعني أن لجملة المعادلات الخطية عدداً عدده من الحلول ومن ثم يكون لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتجانسة (1) عدد عدده من الحلول.

Scanned by CamScanner

الآن لنقابل كل حل $c_1, c_2, \dots c_n$ لجملة المعادلات الخطية بشعاع $\vec{c}$ حيث

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots c_n)$$

إن مجموعة الحلول $\vec{c}$ تشكل فضاء متجهي سمي هذا الفضاء بفضاء الحلول وهو فضاء بعده منته نرمز له بالرمز $E_{(A)}$ بناءً على ذلك نستطيع أن نكتب:

$$\dim E_{(A)} = p \qquad \text{بعد الفضاء } p$$

وبما أنه منته البعد وبعده p هذا يعني لدينا p من الحلول المستقلة خطياً لمجموعة المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة $**$ ، وهذا يعني وجود قاعدة لفضاء الحلول تتكون من p متجه مستقل ولتكن:

$$\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \vec{c}^{(3)}, \dots \vec{c}^{(p)} \qquad \text{متجهات القاعدة}$$

فإن أي حل هو تركيب خطي لمتجهات القاعدة

لنوضح الفكرة السابقة من خلال المثال التالي:

مثال: لنأخذ جملة المعادلات التالية:

$$(1) \quad c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$

$$(2) \quad 2c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$(3) \quad -3c_1 - 3c_2 + 4c_3 = 0$$

وهي جملة ثلاث معادلات متجانسة بثلاثة مجاهيل، معين الأمثال من الشكل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$(-2R_1 + R_2 \to R_2,\ 3R_1 + R_3 \to R_3)$ حسب خواص المحددات — نشرحسب العمود الأول

بما أن معين الأمثال معدوم وجملة المعادلات متجانسة فهذا يعني أن جملة المعادلات المعروضة عددها غير منته من الحلول، لنستخلص مجموعة هذه الحلول:

بجمع المعادلتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد أن:

$$3c_1 + c_3 = 0 \Rightarrow \{c_3 = -3c_1\}$$

Scanned by CamScanner

نعوض في (1) نجد :

$$c_1 - c_2 + 2(-3c_1) = c_1 - c_2 - 6c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \{c_2 = -5c_1\}$$

وبالتالي مجموعة الحلول للجملة المعروضة هي

$$\{\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)\} = \{c = (c_1, -5c_1, -3c_1)\} = \{c = c_1(1, -5, -3)\}$$

والمجموعة الأخيرة تمثل فضاء حلول الجملة المعروضة وهذا الفضاء له قاعدة مؤلفة من شعاع واحد ليكن : $c_1 = -p$ حيث (p وسيطاً)

$$\{\vec{c} = p(-1, 5, 3)\}$$

وعليه :

إذاً متجه القاعدة هو $(-1,5,3)$ ومن ثم بعد الفضاء هو الواحد (لأنه لدينا وسيط واحد p)

* متابعة في دراسة حل معادلة فريدهولم الكاملية الخطية المتجانسة باستخدام النواة المترددية :

إن صيغة الحل لمعادلة فريدهولم غير المتجانسة باستخدام النواة المترددية هي :

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k q_k(x)$$

وفي حال المتجانسة ، نضع $f(x) = 0$ فنجد أن :

$$\psi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k q_k(x) \quad \dots (*)$$

الآن إذا استعرضنا متجهات القاعدة $\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \dots, \vec{c}^{(p)}$ لفضاء حلول جملة المعادلات الخطية ، نجد أن كل متجه من متجهات القاعدة سوف يعطينا حل لمعادلة فريدهولم المتجانسة وذلك بعد تعويضه في * أي أننا نحصل على الحل الخاص المقابل الآتية والتي عددها p حل

$$\psi_1(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(1)} q_k(x) \quad ; \quad \psi_2(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(2)} q_k(x)$$

$$\psi_3(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(3)} q_k(x) \quad ; \quad \dots\dots \quad \psi_p(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(p)} q_k(x)$$

Scanned by CamScanner

الآن بما أن $\vec{C}^{(1)}, \vec{C}^{(2)}, \dots \vec{C}^{(p)}$ متجهات قاعدة فهي مستقلة خطياً متباينة

وعليه فإن الدوال $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_p(x)$ هي دوال مستقلة خطياً متباينة والعكس صحيح

وبالتالي يكون الحل العام هو تركيب خطي لهذه الحلول : أي أن :

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \dots + c_p\psi_p(x)$$

طبيعة : ثوابت $c_1, c_2, c_3, \dots c_p$

- إثبات جملة لاستقلال خطي ، أي إثبات أن :

$\vec{C}^{(1)}, \vec{C}^{(2)}, \dots \vec{C}^{(p)}$ مستقلة خطياً $\Leftrightarrow$ $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_p(x)$ مستقلة خطياً

لنفرض أن المتجهات $\vec{C}^{(1)}, \vec{C}^{(2)}, \dots \vec{C}^{(p)}$ مستقلة خطياً ، ولنثبت أن الدوال

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_p(x)$ دوال مستقلة خطياً

لنفرض جدلاً أن الدوال $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_p(x)$ مرتبطة خطياً وبالتالي يكون :

$$r_1\psi_1(x) + r_2\psi_2(x) + \dots r_p\psi_p(x) = 0 \quad \dots(1)$$

حيث أن : $r_1, r_2, \dots r_p$ ليست جميعها أصفار.

ومنه :

$$r_1 \wedge \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(1)} a_k(x) + r_2 \wedge \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(2)} a_k(x) + \dots + r_p \wedge \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(p)} a_k(x) = 0$$

$$\Rightarrow \wedge \left[r_1 \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(1)} a_k(x) + r_2 \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(2)} a_k(x) + \dots + r_p \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(p)} a_k(x) \right] = 0$$

$$\Rightarrow r_1 \left(c_1^{(1)} a_1(x) + c_2^{(1)} a_2(x) + \dots + c_n^{(1)} a_n(x) \right) + r_2 \left(c_1^{(2)} a_1(x) + c_2^{(2)} a_2(x) + \dots + c_n^{(2)} a_n(x) \right)$$

$$+ \dots + r_p \left(c_1^{(p)} a_1(x) + c_2^{(p)} a_2(x) + \dots + c_n^{(p)} a_n(x) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(r_1 c_1^{(1)} + r_2 c_1^{(2)} + \dots + r_p c_1^{(p)} \right) a_1(x) + \left(r_1 c_2^{(1)} + r_2 c_2^{(2)} + \dots + r_p c_2^{(p)} \right) a_2(x)$$

$$+ \dots + \left(r_1 c_n^{(1)} + r_2 c_n^{(2)} + \dots + r_p c_n^{(p)} \right) a_n(x) = 0$$

Scanned by CamScanner

$a_1(x), a_2(x), \dots a_n(x)$ مستقلة خطياً

وبالتالي من السابق لا حاجة من تعريف الاستقلال الخطي.

$$(\gamma_1 c_1^{(1)} + \gamma_2 c_1^{(2)} + \dots + \gamma_p c_1^{(p)} \; , \; \gamma_1 c_2^{(1)} + \dots + \gamma_p c_2^{(p)} \; , \; \gamma_1 c_n^{(1)} + \dots + \gamma_p c_n^{(p)}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 c_1^{(1)} + \gamma_2 c_1^{(2)} + \dots + \gamma_p c_1^{(p)} = 0$$

$$\gamma_1 c_2^{(1)} + \gamma_2 c_2^{(2)} + \dots + \gamma_p c_2^{(p)} = 0$$

$$\vdots$$

$$\gamma_1 c_n^{(1)} + \gamma_2 c_n^{(2)} + \dots + \gamma_p c_n^{(p)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 \vec{c}^{(1)} + \gamma_2 \vec{c}^{(2)} + \dots + \gamma_p \vec{c}^{(p)} = 0$$

$\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \dots \vec{c}^{(p)}$ مستقلة خطياً وبالتالي:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p = 0$$

وهذا تناقض للفرض ومنه الفرض الجدلي خاطئ والدوال $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_p(x)$ مستقلة خياضياً

ويبرهن العكس بأسلوب شابه عاماً !!

◀ دراسة حل معادلة فريدهولم في الحالة التي يكون فيها $\Delta(\lambda) = 0$ و $h(x) \neq 0$ (غير المتجانسة) من أجل ذلك سنتعرف على المعادلة التكاملية المنقولة..

تعريف المعادلة التكاملية المنقولة: هي معادلة من الشكل:

$$\varphi(x) = L(x) + \lambda \int_a^b K(t,x) \cdot \varphi(t) \, dt \quad \dots (1)$$

نلاحظ أن: النواة في المعادلة التكاملية المنقولة لا تختلف عن النواة الموجودة في معادلة فريدهولم التكاملية الخطية سوى أن x, t تبادلا موضعيهما

Scanned by CamScanner

مثال:

$$(1)\quad \varphi(x) = \sin x + \lambda \int_0^1 (t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

$$(2)\quad \varphi(x) = \sin(x) + \lambda \int_0^1 (x-t)\,\varphi(t).dt$$

إنّ المعادلة التكاملية (1) هي منقول المعادلة التكاملية (2)

نلاحظ أنّه عندما $L(x) = 0$ تصبح المعادلة التكاملية المنقولة (1) بالشكل:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(t,x).\,\varphi(t).dt$$

وتسمى بالمعادلة التكاملية المنقولة المتجانسة.

- إذا كانت النواة في المعادلة التكاملية المنقولة ثنائية فإنها تكتب بالشكل:

$$k(t,x) = \sum_{k=1}^{k=n} b_k(x).a_k(t) \quad \dots (2)$$

نعوض (2) في (1):

$$\varphi(x) = L(x) + \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^{k=n} b_k(x).a_k(t).\varphi(t).dt$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = L(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} b_k(x) \int_a^b a_k(t)\,\varphi(t).dt$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = L(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k\, b_k(x) \quad ; \quad c_k = \int_a^b a_k(t).\varphi(t).dt$$

حيث $k = 1, 2, \dots n$

نبدل في المعادلة الأخيرة كل x بـ t ومن ثم نغير دليل المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن فنضع m عوضاً عن كل k فنجد:

$$\varphi(t) = L(t) + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m.b_m(t)$$

نعوض عبارة $\varphi(t)$ السابقة بـ $\varphi(t)$ الموجودة في عبارة c_k فنجد أن:

$$c_k = \int_a^b a_k(t) \left[L(t) + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m\, b_m(t) \right].dt$$

$$= \int_a^b a_k(t)\,L(t).dt + \lambda \int_a^b a_k(t) \sum_{m=1}^{m=n} c_m\, b_m(t).dt$$

Scanned by CamScanner

$$= \int_a^b q_k(t)\, L(t).dt + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} c_m \int_a^b q_k(t)\, b_m(t).dt$$

$$\Rightarrow \quad c_k = L_k + \lambda \sum_{m=1}^{m=n} a_{km} c_m \quad \ldots (3)$$

حيث:

$$L_k = \int_a^b q_k(t).L(t).dt \quad \text{and} \quad a_{km} = \int_a^b q_k(t).b_m(t).dt$$

حيث

$$k, m = 1, 2, \ldots m$$

نعوض في (3) كل k بـ m وكل m بـ k ، فنجد أن:

$$c_m = L_m + \lambda \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk} c_k \qquad m = 1, 2 \ldots, n$$

أو بالشكل:

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk} c_k = L_m \quad ; m = 1, 2 \ldots n \quad \ldots (4)$$

إن (4) هي الإجمالة معادلات خطية مؤلفة من n معادلة بـ n مجهول c_k

* وهذا يعني أنّ حل المعادلة التكاملية المنقولة المرفوضة في حالة النواة المتردية يحقق حل جملة المعادلات الخطية (4) عند المتباينة.

معين الأمثال للمجموعة الأخيرة، هو:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

وهو يساوي معين الأمثال لجملة المعادلات الخطية الناتجة من دراسة معادلة فريدهولم التكاملية الخطية في حالة النواة المتردية.

إذاً نستنتج أنّ القيم المميزة للنواة $K(t,s)$ هي القيم المميزة للنواة $K(s,t)$

مما سبق نتيج أنه إذا كان لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية عند المتباينة حلاً وحيداً فإن للمعادلة التكاملية المنقولة حلاً وحيداً أيضاً.

Scanned by CamScanner

المعادلة التكاملية المنقولة المتباينة :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(t,x)\,\varphi(t)\,dt$$

بإتباع نفس الدراسة السابقة التي درسناها في المعادلة التكاملية المنقولة عن التباينة سنجد أنّ :

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk} c_k = 0 \quad ; \quad m = 1,2,\dots n \qquad \dots(5)$$

أنّ لجملة المعادلات الخطية (5) حلاً غير الحل الصفري (رأينا سابقاً من أجل $\Delta(\lambda) \neq 0$)

إذا فرضنا أنّ $E'_{(\lambda)}$ هو فضاء حلول جملة المعادلات (5) ، عندئذٍ يكون بُعد هذا الفضاء مساوٍ لبعد الفضاء $E(\lambda)$.

إذاً فرضنا أنّ مجموعة المتجهات $\vec{C}^{(m)} = (c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \dots c_n^{(m)})$

حيث : $m = \overline{1:p}$

لأننا فرضنا سابقاً : $\dim(E'_{(\lambda)}) = \dim(E_{(\lambda)}) = p$

تشكل قاعدة لفضاء الحلول $E'_{(\lambda)}$

نجد أن كل مركبة من مركبات القاعدة سيعطينا حل للمعادلة المنقولة المتباينة

وذلك بعد تعويضه في :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k b_k(x)$$

أي أننا نحصل على الحلول الخاصة المقابلة الآتية ، التي عددها p حل :

$$\varphi^{(m)}(x) = \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k^{(m)} \cdot b_k(x) \qquad m = \overline{1:p}$$

أي لدينا : $\varphi^{(m)}(x)$ حلاً للمعادلة التكاملية المتباينة المنقولة ، والحلول :

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(p)}(x)$$

مستقلة خطياً ، تشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة .

* نعلم أن الشرط اللازم والكافي لحل جملة المعادلات الخطية :

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_k a_{mk} = h_m \quad ; \quad m = \overline{1:n}$$

في حال $\Delta(\lambda) = 0$ ، هو أن يكون المتجه :

$$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots h_m)$$

متعامد مع جميع المتجهات $\vec{z}^{(m)}$ ، أي أنّ الجداء الداخلي لهما يساوي الصفر .

Scanned by CamScanner

$$\vec{h}.\vec{C}^{(m)} = 0 \quad \forall m = \overline{1:p}$$

$$\Rightarrow (h_1, h_2, \dots h_n).(c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \dots, c_n^{(m)}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} h_k . c_k^{(m)} = 0$$

نعلم أن :

$$\text{ومنه: } h_k = \int_a^b b_k(t).h(t).dt$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\int_a^b b_k(t).h(t).dt\right] c_k^{(m)} = 0 \Rightarrow \int_a^b \sum_{k=1}^{k=n} \left[b_k(t).c_k^{(m)}\right] h(t).dt = 0$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ λ نحصل على :

$$\int_a^b \lambda \sum_{k=1}^{k=n} \left[c_k^{(m)} \; b_k(t)\right] h(t).dt = 0$$

$$\text{لكن: } \lambda \sum_{k=1}^{k=n} c_1^{(m)} . b_k(t) = \varphi^{(m)}(t)$$

$$\text{شرط التعامد: } \int_a^b \varphi^{(m)}(t).h(t).dt = 0 \quad m = \overline{1:p}$$

إذا تحققت شروط التعامد عندئذٍ يوجد لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية حل

كيفية إيجاد هذا الحل :

نفرض أنه يوجد حل خاص مثل $\psi_0(x)$ لمعادلة فريدهولم ثم نجري التحويل الآتي :

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \overline{\psi_1(x)}$$

نعوض هذا التحويل في معادلة فريدهولم التكاملية الخطية نجد أن :

$$\psi_0(x) + \overline{\psi_1(x)} = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[\psi_0(t) + \overline{\psi_1(t)}\right].dt$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) + \overline{\psi_1(x)} = \underbrace{h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t).\psi_0(t).dt}_{=\psi_0(x)} + \lambda \int_a^b k(x,t).\overline{\psi_1(t)}.dt$$

Scanned by CamScanner

$$\psi_0(x) + \overline{\psi_1(x)} = \psi_0(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \cdot \overline{\psi_1(t)} \, dt$$

$$\overline{\psi_1(x)} = \lambda \int_a^b K(x,t) \cdot \overline{\psi_1(t)} \, dt$$

نلاحظ أنّ المعادلة الأخيرة هي نفسها معادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتجانسة لكن هنا التابع المجهول هو $\overline{\psi_1(x)}$ إذاً الحل العام لمعادلة فريدهولم المدروسة هو عبارة عن حل خاص $\psi_0(x)$ مضافاً إليه $\overline{\psi_1(x)}$ تعطى وفق الصيغة السابقة.

لكن سبق أن وجدنا أنّ الحل العام للمعادلة الأخيرة المتجانسة هو عبارة عن تركيب خطي لمجموعة من الحلول المستقلة خطياً $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_p(x)$ ، أي أنّ:

$$\overline{\psi_1(x)} = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \cdots + c_p \psi_p(x)$$

وهذا بدوره يعني أن الحل العام لمعادلة فريدهولم الخطية المدروسة غير المتجانسة (1) تعطى بالشكل:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \cdots + c_n \psi_p(x)$$

حيث: $c_1, c_2, \ldots c_p$ ثوابت.

وهو عبارة عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة مضافاً له حل عام للمتجانسة الموافقة.

- على ضوء ما سبق يمكن صياغة مبرهنة فريدهولم بالشكل التالي:

" نص مبرهنة فريدهولم "

← إذا لم تكن λ قيمة مميزة للنواة $K(x,t)$ فلمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتجانسة ولنقول هذه المعادلة الحل الصفري فقط ويكون للمعادلة التكاملية (فريدهولم) غير المتجانسة ولنقول حلاً وحيداً.

← إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $K(x,t)$ فإن لمعادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة حلولاً غير الحل الصفري وهذه الحلول تشكل فضاء ذا بعد منتهي كما ويكون لنقول لمعادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة حلولاً غير الحل الصفري وهذه الحلول تشكل فضاء ذا بعد منتهي، وإذا فرضنا أن الدوال $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_p$

Scanned by CamScanner

تشكل قاعدة لفضاء الحل الأول والدوال $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \ldots \varphi_1^p$ تشكل قاعدة لفضاء الحل الثاني

عندئذٍ: الشرط اللازم والكافي كي يكون لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة (1) حلاً هو أن تتحقق شروط التعامد

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(t).h(t).dt = 0 \quad ; m = 1,2,\ldots p$$

وعندها يكون الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + e_1\psi_1(x) + \ldots + e_p\psi_p(x)$$

حيث: $e_1, e_2, e_3 \ldots e_p$ ثوابت، وإذا لم تتحقق شروط التعامد فإن المعادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة (1) مستحيلة الحل.

مثال: حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)\,\psi(t).dt = \cos x$$

الحل: نكتب المعادلة التكاملية بالشكل النموذجي:

$$\psi(x) = \cos x + \lambda\int_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)\,\psi(t).dt$$

حيث:

$h(x) = \cos x \qquad I = [a,b] = [0,\pi] \qquad K(x,t) = x^2\cos t + x\sin t$

نلاحظ أن النواة التكاملية تكتب بالشكل:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{2} a_k(x)\,b_k(t)$$

$$= a_1(x)\,b_1(t) + a_2(x)\,b_2(t)$$

حيث:

$a_1(x) = x^2 \qquad b_1(t) = \cos t$

$a_2(x) = x \qquad b_2(t) = \sin t$

$$\begin{bmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_1'(x) & a_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix} = x^2 - 2x^2 = -x^2 \neq 0$$

ومنه مستقلة خطياً

Scanned by CamScanner

$$\begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_1'(t) & b_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

ومنه مستقلة خطياً

▲ إثبات أن النواة كولة تربيعياً:

1)- $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x^2 \cos t + x \sin t|^2 .dx.dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + 2x^3 \cos t \sin t + x^2 \sin^2 t).dx.dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}.dt + 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos t . \sin t \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}.dt$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}.dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t.dt + 2(0)\int_{-\pi}^{\pi} \cos t.\sin t.dt + \frac{2\pi^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t.dt$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}.dt + \frac{2\pi^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$= \frac{\pi^5}{5}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\pi^3}{3}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{5}\pi^6 + \frac{2}{3}\pi^4 = \frac{6\pi^6 + 10\pi^4}{15} < \infty$$

2)- $$\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + 2x^3 \cos t.\sin t + x^2 \sin^2 t.dx$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}\cos^2 t + \frac{2\pi^3}{3}\sin^2 t < \infty \qquad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Scanned by CamScanner

3) - $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \cos^2 t + 2x^3 \cos t \sin t + x^2 \sin^2 t)\,dt$

$= \pi x^4 + \pi x^2 \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$

وبالتالي: $K(x,t)$ كولة تربيعياً على المربع $D = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$

وبالتالي نواة المعادلة التكاملية هي نواة متردية..

نعلم أن: صيغة الحل باستخدام النواة المتردية هي من الشكل:

$$\varphi(x) = \rho(x) + \lambda \sum_{k=1}^{k=2} C_k \cdot a_k(x)$$

"مجهول"

لنوجد الثوابت: C_1, C_2

$$(1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12} C_2 = \rho_1$$
$$-\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22}) C_2 = \rho_2$$

لنوجد $a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11}$

$$a_{mk} = \int_a^b b_m(t) \cdot a_k(t)\,dt$$

$$\Rightarrow a_{11} = \int_a^b b_1(t) \cdot a_1(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t^2\,dt = -4\pi \Rightarrow \boxed{a_{11} = -4\pi}$$

$$\Rightarrow a_{12} = \int_a^b b_1(t) \cdot a_2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 0}$$

$$\Rightarrow a_{21} = \int_a^b b_2(t) \cdot a_1(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cdot \sin t\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{a_{21} = 0}$$

$$\Rightarrow a_{22} = \int_a^b b_2(t) \cdot a_2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot t = 2\pi \Rightarrow \boxed{a_{22} = 2\pi}$$

Scanned by CamScanner

لنوجد ρ_1, ρ_2 :

$$\rho_k = \int_a^b b_k(t).\rho_k(t).dt$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \int_a^b b_1(t).\rho_1(t).dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t.\cos t.dt = \pi \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \pi}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \int_a^b b_2(t).\rho_2(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t.\cos t.dt = 0 \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 0}$$

"عندئذٍ نعوض" :

$$(1+4\pi\lambda)\,c_1 + 0c_2 = \pi \qquad (*)$$

$$0\,c_1 + (1-2\pi\lambda)\,c_2 = 0 \qquad (**)$$

محدد الأمثال :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\pi\lambda \end{vmatrix} = (1+4\pi\lambda)(1-2\pi\lambda)$$

نناقش قيم λ :

$$\Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow (1+4\pi\lambda)(1-2\pi\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4\pi} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$$

من أجل جميع قيم λ إذ $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ يكون لجملة المعادلات حلاً وحيداً

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{\pi}{1+4\pi\lambda}} \;,\; \boxed{c_2 = 0}$$

بالتعويض في صيغة الحل :

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1+4\pi\lambda}x^2$$

من أجل $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{4\pi}$ بالتعويض في جملة المعادلات ..

$$0c_1 + 0c_2 = \pi \;,\; 0c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 0$$

Scanned by CamScanner

ومنه جملة المعادلات سقلية الحل لأن $\pi \neq 0$

$\Leftarrow$ ليس لها حل للمعادلة المفروضة

من أجل $A = A_2 = \frac{1}{2\pi}$

$C_1 = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $C_2 = 0$ "C_2 اختياري"

وبالتالي لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.

$C_2 = A$ ((ثابت كيفي)) $\quad$ $C_1 = \frac{\pi}{3}$

نعوض في صيغة الحل:

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{A}{2\pi}x$$

حيث: $A_1 = \frac{A}{2\pi}$

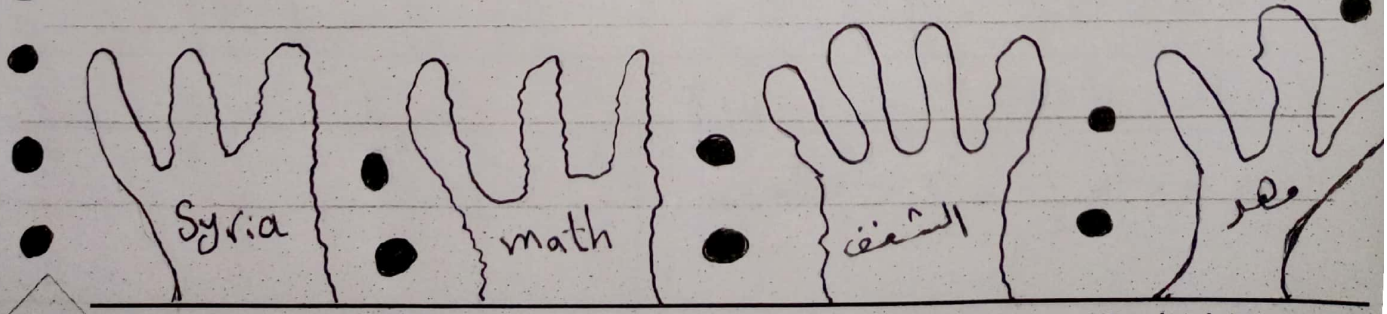
$$\Rightarrow \varphi(x) = \cos x + \frac{1}{6}x^2 + A_1 x$$

وهو المطلوب ☺

انتهت المحاضرة ... ♡

إعداد: إلياس دليل...

"كن عالمك اليومي فجاج جد ذاته ما دمت تكافح وتسعى لما تريده فأنت شخص عظيم"



Scanned by CamScanner

حل تمارين الوظيفة:

1- $\psi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x.t.\psi(t).dt$

سنحل هذه المعادلة بطريقة (التقريبات المتتالية)

المعادلة المعروضة من الشكل:

$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t).dt$

$h(x) = \frac{5}{6}x \qquad \lambda = \frac{1}{2}$

$I = [a,b] = [0,1] \qquad K(x,t) = x.t$

هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني عديمة التجانس، نتحقق من أن h, K والتين كولتين تربيعياً:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{5}{6}x\right|^2.dx = \int_0^1 \frac{25}{36}x^2.dx$$

$$= \frac{25}{36}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{25}{36}.\frac{1}{3}(1-0)$$

$$= \frac{25}{108} < \infty$$

إذن h دالة كولة تربيعياً على I

$$\int_0^1\int_0^1 |x\,t|^2.dx.dt = \int_0^1\int_0^1 x^2.t^2.dx.dt$$

$$= \int_0^1 t^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1.dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2.dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{9}(1-0) = \frac{1}{9} < \infty$$

$$\int_0^1 |x.t|^2.dx = \int_0^1 x^2.t^2.dx = t^2\int_0^1 x^2.dx$$

$$= t^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}t^2 < \infty \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 |x.t|^2.dt = \int_0^1 x^2.t^2.dt = x^2\int_0^1 t^2.dt$$

$$= x^2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}x^2 < \infty \quad \forall x \in [0,1]$$

وبما أن K دالة كولة تربيعياً على D

$D = [0,1]\times[0,1]$

"التقريب الأول" $\psi_0(x) = h(x) = \frac{5}{6}x$

"التقريب الثاني"

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda\int_a^b K(x,t).\psi_0(t).dt$$

$$\psi_1(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x.t.\left(\frac{5}{6}t\right).dt$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{5}{12}x\int_0^1 t^2.dt$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{5}{12}x\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}\right)x$$

$$\psi_1(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{36}x = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6^2}x$$

"التقريب الثالث"

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda\int_a^b K(x,t).\psi_1(t).dt$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x.t\left(\frac{5}{6}t + \frac{5}{6^2}t\right).dt$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\int_0^1 \frac{5}{6}t^2.dt + \int_0^1 \frac{5}{6^2}t^2.dt\right)$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\frac{5}{6}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \frac{5}{6^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\frac{5}{6}.\frac{1}{3} + \frac{5}{6^2}.\frac{1}{3}\right)$$

$$\psi_2(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6^2}x + \frac{5}{6^3}x$$

Scanned by CamScanner

$$\psi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\cdot\psi_2(t)\,dt$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x.t\left(\frac{5}{6}t + \frac{5}{6^2}t + \frac{5}{6^3}t\right)dt$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\frac{5}{6}\int_0^1 t^2dt + \frac{5}{6^2}\int_0^1 t^2dt + \frac{5}{6^3}\int_0^1 t^2dt\right)$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6^3}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \psi_3(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6^2}x + \frac{5}{6^3}x + \frac{5}{6^4}.x$$

وبالتكرار نحصل على:

$$\psi_n(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6^2}x + \cdots + \frac{5}{6^{n+1}}x$$

ومنه:

$$\Rightarrow \psi_n(x) = \frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

ونأخذ النهاية فنجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = \psi(x) = \frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{5}{6}x\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \frac{5}{6}.x\left(\frac{6}{5}\right) = x$$

ومنه حل المعادلة المعطاة:

$$\psi(x) = x$$

2 $\psi(x) - \int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)\psi(t)\,dt = 1$

سنحل هذه المعادلة بطريقة التقريبات المتتالية

نكتبها بالشكل:

$$\psi(x) = 1 + \int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)\psi(t)\,dt$$

إن المعادلة المعطاة هي من الشكل:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\cdot\psi(t)\,dt$$

حيث:

$$f(x) = 1 \quad \lambda = 1 \quad I = [0,1]$$

$$k(x,t) = x\left(1-\frac{3}{2}t\right)$$

هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني ذات النواة:

نتحقق أولاً من أن الدالتين f, k محلولتين تربيعياً

$$\int_0^1 |1|^2\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 < \infty$$

ومنه الدالة f محلولة تربيعياً على $I=[0,1]$

$$\int_0^1\int_0^1 \left|x\left(1-\frac{3}{2}t\right)\right|^2 dx\,dt$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^2\left(1-\frac{3}{2}t\right)^2 dx\,dt$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\int_0^1\left(1-3t+\frac{9}{4}t^2\right)dt\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^2\left([t]_0^1 - 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \frac{9}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^2\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12} < \infty$$

Scanned by CamScanner

$$\int_0^1 |x(1-\tfrac{3}{2}t)|^2 .dx$$

$$= (1-\tfrac{3}{2}t)^2 \int_0^1 x^2 .dx = \frac{1}{3}(1-\tfrac{3}{2}t)^2 < \infty \quad ;\forall t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 |x(1-\tfrac{3}{2}t)|^2 .d$$

$$= x^2 \int_0^1 (1-3t+\tfrac{9}{4}t^2).dt$$

$$= x^2 \left([t]_0^1 - 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \frac{9}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \right)$$

$$= x^2 \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \quad \forall x \in [0,1]$$

ومنه K كولة تربيعياً على المربع

$$D = [0,1]\times[0,1]$$

"التقريب الأول"

$$\psi_0(x) = h(x) = 1$$

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi_0(t)\,dt$$

$$\psi_1(x) = 1 + \int_0^1 x(1-\tfrac{3}{2}t).dt$$

$$= 1 + x\left([t]_0^1 - \frac{3}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \right)$$

$$= 1 + x\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_1(x) = 1 + \frac{1}{4}x}$$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi_1(t).dt$$

$$= 1 + \int_0^1 x(1-\tfrac{3}{2}t)(1+\tfrac{1}{4}t).dt$$

$$= 1 + x\int_0^1 (1 + \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{3}{8}t^2).dt$$

$$= 1 + x\left([t]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{3}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{3}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \right)$$

$$= 1 + x\left(1 + \tfrac{1}{8} - \frac{3}{4} - \tfrac{1}{8}\right)$$

$$\boxed{\psi_2(x) = 1 + \frac{x}{4}}$$

$$\psi_3(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\psi_2(t).dt$$

$$\psi_3(x) = 1 + \int_0^1 x(1-\tfrac{3}{2}t)(1+\tfrac{1}{4}t).dt$$

$$= 1 + \frac{1}{4}x$$

$$\boxed{\psi_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x}$$

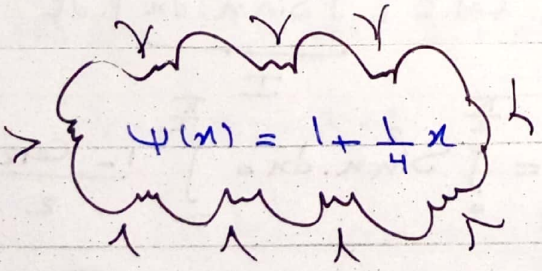
وبالتكرار:

$$\psi_n(x) = 1 + \frac{1}{4}x$$

نأخذ النهاية عندما $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) = 1 + \frac{1}{4}x$$

ومنه حل المعادلة المعروضة:



Scanned by CamScanner

3- أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos t \, \varphi(t)\,dt = 1$$

سنحل هذه المعادلة بطريقة نواة متكررة.

نكتب المعادلة المعروضة بالشكل:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos t \cdot \varphi(t)\,dt$$

هي معادلة من النوع التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\cdot \varphi(t)\,dt$$

حيث:

$$f(x) = 1 \qquad \lambda = 1 \qquad I = [0,1]$$

$$K(x,t) = \sin x \cdot \cos t$$

لنتحقق من شرط الحل:

$$|\lambda| < \frac{1}{B}$$

حساب B

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \,dx\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} |\sin x \cdot \cos t|^2 \,dx\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^2 t \,dx\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx}_{I}\right] dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\pi}{4}$$

ومنه شرط الحل:

$$|\lambda| = 1 < \frac{1}{B} = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}2732$$

محققة ومنه يمكننا الحل باستخدام نواة متكررة.

نوجد نوى متكررة:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = \sin x \cdot \cos t$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)\cdot K_1(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos z)(\sin z \cdot \cos t)\,dz$$

$$= \sin x \cdot \cos t \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos z \cdot \sin z)\,dz}_{I}$$

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin z)\cos z\,dz$$

$$= -\left[\frac{\cos^2 z}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}[0-1] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow K_2(x,t) = \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos t$$

Scanned by CamScanner

$$K_3(x,t) = \int_a^b K_1(x,z).K_2(z,t).dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x.\cos z)\left(\frac{1}{2}\sin z\cos t\right).dz$$

$$= \frac{1}{2}\sin x.\cos t \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin z.\cos z.dz}_{I=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow K_3(x,t) = \frac{1}{2^2}\sin x.\cos t$$

$$K_4(x,t) = \int_a^b K_1(x,z).K_3(z,t).dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x.\cos z)\left(\frac{1}{2^2}\sin z.\cos t\right).dz$$

$$= \frac{1}{2^2}\sin x.\cos t \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin z.\cos z.dz}_{I=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^3}\sin x.\cos t$$

وبالتكرار نجد أن:

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2^{m-1}}\sin x\cos t$$

نعلم أن صيغة الحل باستخدام النواة المكررة تعطى بالشكل:

$$\psi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t) f(t)\,dt$$

$$\psi(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (1)^m \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2^{m-1}}\sin x\cos t\,dt$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}}\sin x \int_0^{\pi/2} \cos t.dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos t.dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

بالتعويض نجد أن:

$$\psi(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\sin x$$

باستبدال كل m بـ $m+1$:

$$\psi(x) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m}.\sin x$$

$$\psi(x) = 1 + \sin x \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m}}_{\text{متسلسلة هندسية } r=\frac{1}{2}}$$

$$\psi(x) = 1 + 2\sin x$$

4- أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = x + 4\int_0^1 x^2.t^2\,\psi(t).dt$$

سنحل هذه المعادلة بطريقة النواة المكررة:

إن المعادلة المعروضة هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني.

من الشكل:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t).\psi(t).dt$$

حيث:

$$f(x) = x \qquad \lambda = 4 \qquad I = [0,1]$$

$$K(x,t) = x^2.t^2$$

أولاً: لنتحقق من شرط الحل:

$$|\lambda| < \frac{1}{B}$$

Scanned by CamScanner

لحساب B :

$$B^2 = \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\,dx\,dt = \int_0^1\int_0^1 |x^2t^2|^2\,dx\,dt$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^4t^4\,dx\,dt = \int_0^1 x^4\left[\int_0^1 t^4\,dt\right]dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{25}$$

$$B^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$|\lambda| = 4 < \frac{1}{B} = 5$$

الشرط محقق ويمكننا الحل باستخدام طريقة "النواة المكررة"

ثانياً: لنوجد النوى المكررة

$$k_1(x,t) = k(x,t) = x^2\cdot t^2$$

$$k_2(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\cdot k_1(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^1 (x^2z^2)(z^2t^2)\,dz = x^2t^2\int_0^1 z^4\,dz$$

$$\Rightarrow k_2(x,t) = \frac{1}{5}x^2t^2$$

$$k_3(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\cdot k_2(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^1 (x^2z^2)\left(\frac{1}{5}z^2\cdot t^2\right)dz$$

$$= \frac{1}{5}x^2t^2\int_0^1 z^4\,dz = \frac{1}{5}x^2t^2\left(\frac{z^5}{5}\right)_0^1$$

$$\Rightarrow k_3(x,t) = \frac{1}{5^2}x^2t^2$$

$$k_4(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\,k_3(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^1 (x^2z^2)\left(\frac{1}{5^2}z^2t^2\right)dz$$

$$= \frac{1}{5^2}x^2t^2\int_0^1 z^4\,dz = \frac{1}{5^3}x^2\cdot t^2$$

$$\Rightarrow k_4(x,t) = \frac{1}{5^3}x^2t^2$$

وبالتكرار نجد أن:

$$k_m(x,t) = \frac{1}{5^{m-1}}x^2t^2$$

نعلم أن صيغة الحل تعطى بالشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b k_m(x,t)f(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty}(4)^m\int_0^1 \frac{1}{5^{m-1}}x^2t^2(t)\,dt$$

$$= x + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4^m}{5^{m-1}}\right)x^2\int_0^1 t^3\,dt$$

$$= x + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4^m}{5^{m-1}}\right)x^2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1$$

$$= x + x^2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{m-1}$$

نبدل كل m بـ m+1 فنجد:

$$\varphi(x) = x + x^2\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^m$$

متسلسلة هندسية

$$\varphi(x) = x + 5x^2$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة المعروضة...

Scanned by CamScanner

5- باستخدام النواة الحالة أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية التالية:

$$\psi(x) = x + \lambda \int_0^1 x.t.\psi(t).dt$$

المعادلة المفروضة هي معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t).dt$$

حيث: λ = ثابت

$I = [a,b] = [0,1]$ $\quad K(x,t) = x.t$

أولاً: نعين شرط الحل باستخدام النواة الحالة

وهو $\lambda < \frac{1}{B}$

حيث B:

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 .dx.dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |x.t|^2 .dx.dt = \int_0^1 \int_0^1 x^2.t^2.dx.dt$$

$$= \int_0^1 t^2 \left[\int_0^1 x^2.dx\right].dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2.dt = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

وبالتالي للمعادلة حل شرط:

$$|\lambda| < 3$$

لنوجد النوى المكررة:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = x.t$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K_1(x,z).K_1(z,t).dz$$

$$= \int_0^1 (x.z).(z.t).dz$$

$$= x.t \int_0^1 z^2.dz = \frac{1}{3}x.t$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 K_1(x,z)K_2(z,t).dz$$

$$= \int_0^1 (x.z)\left(\frac{1}{3}z.t\right).dz = \frac{1}{3^2}x.t$$

$$K_4(x,t) = \int_0^1 K_1(x,z).K_3(z,t).dz$$

$$= \int_0^1 (x.z).\left(\frac{1}{3^2}z.t\right).dz$$

$$K_4(x,t) = \frac{1}{3^3}x.t$$

وبالتكرار نجد أن:

$$K_m(x,t) = \frac{1}{3^{m-1}}x.t$$

نعوض في عبارة النواة الحالة نجد:

$$R(x,t,\lambda) = x.t + \frac{\lambda}{3}xt + \frac{\lambda^2}{3^2}xt$$

$$+ \frac{\lambda^3}{3^3}xt + \dots + \frac{\lambda^{m-1}}{3^{m-1}}xt + \dots$$

نخرج $x.t$ عامل مشترك:

$$\Rightarrow R(x,t,\lambda) = x.t\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1} + \dots\right)$$

$$= x.t \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^m$$

Scanned by CamScanner

ومنه:

$$R(x,t,\lambda) = \frac{3xt}{3-\lambda} \quad ; \quad |\lambda| < 3$$

نعوض في صيغة الحل:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t).dt$$

$$\Rightarrow \psi(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} t.dt$$

$$\Rightarrow \psi(x) = x + \lambda \frac{3x}{3-\lambda} \left(\frac{1}{3}\right)$$

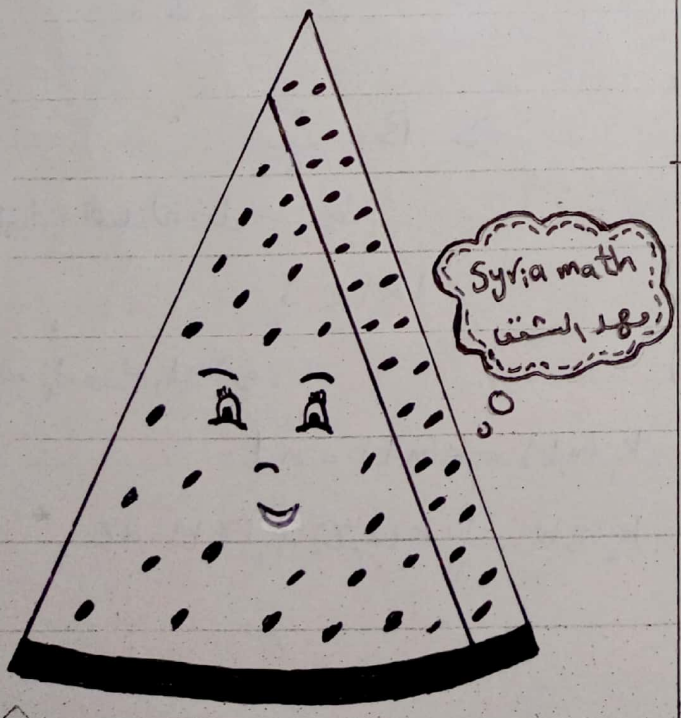
$$= \frac{(3-\lambda)x + \lambda x}{3-\lambda} = \frac{3x}{3-\lambda}$$

ومنه الحل للمعادلة المعروضة هو:

$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{3x}{3-\lambda} \quad ; |\lambda| < 3$$

وبذلك يتم المطلوب !!!

" سيأتيك رزقك من حيث لا تدري، كزهرة قطر ونسيم فجأة ها الله لك حتى حين موعدها " ♡



انتظرك.. ♡

إعداد: إلياس دليل

Scanned by CamScanner