نتيجة: إذا كانت $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in Z[X]$ و $f(x)$ لا تقبل صفراً $a\in Q$ فإنه يوجد $b\in Z$ بحيث $f(b)=0$ وأن $a_0|b$

الإثبات: بما أن f معرفة على Z و $f(a)=0$ ومنه f قابلة للتحليل على Q ومنه حسب مبرهنة سابقة تكون f قابلة للتحليل على Z ومنه الحدودية تكتب بالشكل: $\exists b\in Z$;

$$f(x)=\underbrace{(x-b)}_{\in Z[X]}\underbrace{\left(x^{n-1}a_n+\dots+\frac{a_0}{b}\right)}_{\in Z[X]}$$

$\Rightarrow f(b)=0,\ \frac{a_0}{b}\in Z$

$\Rightarrow a_0|b$

مثال: (1 $f(x)=x^5+6x^3-x^2-6\in Z[X]$

الحل: حسب مبرهنة سابقة $f(x)$ قابلة للتحليل على Q إذا كانت قابلة للتحليل على Z وحسب نتيجة سابقة إذا وجد صفر لـ f في Q فإنه يوجد له صفر في Z ويكون هذا الصفر قاسم لـ $a_0=-6$ أي $b\in\{\mp1,\mp2,\mp3,\mp6\}$

$f(1)=0\Rightarrow$

$f(x)=(x-1)(x^4+x^3+7x^2+6x+6)$

وبالتالي $f(x)$ قابلة للتحليل على $Z[X]$.

(2 $f(x)=x^4-2x^2+3x+1\in Z[X]$

الحل: $b\in\{\mp1\}$

$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$

ومنه لا يمكن تحليل هذه الحدودية حسب النتيجة السابقة.

ملاحظة: أي حدودية معرفة على $\mathbb{C}$ يمكن تحليلها لأن $\mathbb{C}$ مغلقة جبرياً

معيار ايزنشتاين (المبرهنة 11)

ليكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\in Z[X]$

إذا وجد عدد أولي p بحيث:

(1 $a_i\equiv 0 \pmod{p};\ \forall i\in\{1,\dots,n-1\}$

(2 $a_n\not\equiv 0 \pmod{p}$

(3 $a_0\not\equiv 0 \pmod{p^2}$

عندئذ $f(x)$ غير قابلة للتحليل على Q.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن f قابل للتحليل على $\mathbb{Z}$ عندئذ يمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين

$$f(x) = (b_s x^s + \dots + b_0)(c_r x^r + \dots + c_0)$$

حيث $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$

$1 \le r < n$

$1 \le s < n$

$a_0 = b_0 c_0 \,,\, a_n = b_s c_r$

وبما أن $a_0 = b_0 c_0 \equiv 0 \mod p$

$\Rightarrow p \mid a_0 = b_0 c_0$

ومنه $p \mid b_0$ أو $p \mid c_0$

وليكن $p \nmid b_0$ و $p \mid c_0$ على سبيل الفرض

$a_n = b_s c_r \not\equiv 0 \mod p$

$\Rightarrow p \nmid a_n = b_s c_r$

$\Rightarrow p \nmid b_s \,,\, p \nmid c_r$

وليكن m أصغر عدد طبيعي موجب يحقق $i < m, p \mid c_i$ و $p \nmid c_m$

ولدينا $0 < m \le r$

$a_m = c_0 b_m + \dots + c_m b_0$

جميع الحدود عدا الأخير تقبل القسمة على p

وبالتالي $a_m \not\equiv 0 \pmod p$

وهذا تناقض مع الفرض رقم $\boxed{1}$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي f غير قابل للتحليل على Z ومنه غير قابل للتحليل على Q وهو المطلوب

مثال: $f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 - 18x + 24$

لا يمكن تطبيق المعيار لعدم وجود العدد p محققاً للشروط الثلاثة.

$f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 - 18x + 22$

لاحظ $p = 2$ عدد أولي

$\Rightarrow$ f غير قابل للتحليل على Q

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

حيث p عدد أولي

إن $f(x)$ غير قابل للتحليل على Q $\Leftrightarrow$ f غير قابل للتحليل على Z.

ملاحظة: $a \in \mathbb{Z}$ فإن $f(x)$ غير قابل للتحليل على Q إذا كان $f(x+a)$ غير قابل للتحليل على Q.

لنأخذ مثلاً $a = 1$

$$\Rightarrow f(x+1) = (x+1)^{p-1} + \dots + (x+1) + 1 = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \dots + p$$

$f(x+1)$ يحقق الشروط الثلاث $\Leftarrow$ غير قابل للتحليل على Q $\Leftarrow$ f غير قابل للتحليل على Q.

مثال: $f(x)=x^4+1$

$4=p-1 \Rightarrow p=5$

$f(x+1)=(x+1)^4+1$

$=(x^2+2x+1)(x^2+2x+1)+1$

$=x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x$

$+x^2+2x+1+1$

$=x^4+4x^3+6x^2+4x+2$

حسب أيزنشتاين غير . $P=2$

المحاضرة الثامنة:

لتكن R حلقة واحدية وتبديلية

و $\emptyset \neq I \subseteq R$

I مثالي في R إذا:

$\forall x,y \in I;\ x-y \in I$

$\forall r \in R, \forall a \in I;\ r.x \in I$

ونرمز للمثالي بالرمز $I \trianglelefteq R$

كل مثالي هو حلقة جزئية أما العكس ليس صحيح بالضرورة مثال على ذلك

Z , Q لأن Z حلقة جزئية من Q

ولكن يوجد $\frac{1}{2} \in Q, 3 \in Z$

ولكن $\frac{1}{2} . 3 \notin Z$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية وتبديلية

و I مثالي في R إذا:

1) $I=R \Leftarrow 1 \in I$

2) $a \in I$ قابل للقلب في $R \Leftarrow I=R$

البرهان: (1) إن $I \subseteq R$

ليكن $x \in R$ ومنه

$x=1.x \in I$

$\Rightarrow x \in I \Rightarrow R \subseteq I$

$\Rightarrow R=I$

2) $a \in I \Rightarrow \exists b \in R;\ a.b=1 \in I$

$\Rightarrow R=I$ حسب (1)

* صورة المثالي وفق تشاكل حلقي ليس بالضرورة أن يكون مثالي

مثال على ذلك:

$\alpha: Z \to Q$

$y \mapsto y$

$I=Z \trianglelefteq Z$

$\alpha(I)=Z \ntrianglelefteq Q$

والعكس صورة المثالي تأخذ

$\alpha(I) \trianglelefteq Q$

* الصورة العكسية لمثالي هي مثالي.

* تقاطع مثاليات هو مثالي أما الاجتماع ليس بالضرورة

* إذا كان لدي مثالي في حلقة مولد بعنصر واحد نقول عنه أنه حلقة رئيسية

* المثالي الرئيسي: هو مثالي مولد بعنصر واحد فقط.

مثال (1) $R = (2Z, +, \cdot)$

$4Z = \langle 4 \rangle \trianglelefteq R$

(2) $R = (Z, +, \cdot)$ منطقة مثاليات رئيسية لأن $I \trianglelefteq R$ نميز حالتين

1) الحالة $I = \langle 0 \rangle$ مولد بالصفر $I = \langle 0 \rangle$ رئيسي

2) $I \neq \langle 0 \rangle$ وبالتالي $\exists m \in I$ عدد صحيح موجب وبالتالي نفرض أن m أصغر عدد صحيح موجب لأنه يوجد علاقة ترتيب على الأعداد

نريد إثبات أن $I = \langle m \rangle$

$m \in I \Rightarrow \langle m \rangle \subseteq I$

ليكن $n \in I$ وحسب خوارزمية القسمة على m, n بأن $n = qm + r$; $q, r \in Z$

$0 \leq r < m$

لنفرض جدلاً أن $r \neq 0$

$\Rightarrow r = \underset{\in I}{n} - \underset{\in I}{qm} \in I$

وهذا تناقض كون m أصغر عدد صحيح موجب ينتمي لـ I ⟸ الفرض الجدلي خاطئ

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow n = mq \in \langle m \rangle$

$\Rightarrow I = \langle m \rangle$

أي I مثالي رئيسي.

تمرين: 1) إذا كانت R ، ID بين فيما إذا كانت $R[x]$ ، PID (منطقة مثاليات رئيسية) PID

2) إذا كانت R حقل بين فيما إذا كانت $R[x]$ ، PID.

3) R حقل بأن $R[x]$ ليس بالضرورة حقل.

الحل: حل رقم 3

R حقل ⟸ R ، ID ⟸ $R[x]$ ، ID ولنفرض جدلاً أن $0 \neq f(x) \in R[x]$ وهو مقلوب

$\exists g(x) \in R[x] : f \cdot g = 1$

$\Rightarrow \deg(f) + \deg(g) = 0$

>0 شرط غير ثابتة ، موجب

وبالتالي هذا تناقض ⟸ الفرض الجدلي خاطئ

وبالتالي $R[x]$ ليس حقلاً بالضرورة

تعريف: إذا كان R حلقة واحدية وتبديلية و $I, J \trianglelefteq R$

$I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\} \trianglelefteq R$

$I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i : x_i \in I, y_i \in J\} \trianglelefteq R$

مثال: $R = (Z, +, \cdot)$

$I = \langle 2 \rangle, J = \langle 3 \rangle$

$I + J = \langle \gcd(2,3) = 1 \rangle = Z$

$I \cdot J = \langle \mathrm{lcm}(2,3) \rangle = \langle 6 \rangle$

تعريف 1) $I_1, I_2, \dots, I_n \trianglelefteq R$ مثاليات في حلقة R نقول عن $I = I_1 + \dots + I_n$ مجموع مباشر لهذه المثاليات في R إذا

$\forall x \in I : \exists!\, x_i \in I_i ; i \in \{1, \dots, n\}$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

يكتب بشكل وحيد ونرمز له

$$I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$$

أو

$$\bigoplus_{i=1}^{n} I_i$$

2) لتكن R حلقة و $I, J \trianglelefteq R$ نعرف قسمة I على J كما يلي:

$$I : J = \{ r \in R : r.J \subseteq I \} \trianglelefteq R$$

مثال $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ و $I = \langle 2 \rangle$

$J = \langle 6 \rangle$

$I : J = \{ r \in R : r.J \subseteq I \} = R$

$J : I = \{ r \in R : r.I \subseteq J \}$

$= \langle 3 \rangle$

انتهت المحاضرة

إعداد وتقديم

Ahmad Abo Al tot