المحاضرة العاشرة

◄ دكتور المادة: خالد الخنيفس

◄ عنوان المحاضرة: مسألة البائع الجوّال + مسألة ساعي البريد

نظري ☑ عملي ☐

مسألة البائع الجوّال Salesman problem

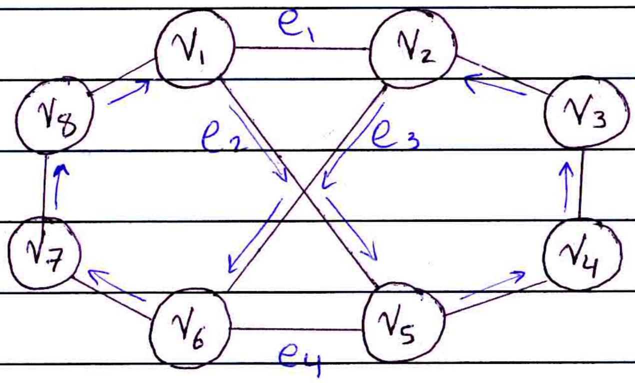
- بائع جوّال يخطط لبيع بضاعته في عدة قرى بحيث تكون المسافة التي يقطعها أصغر ما يمكن، علماً أنه يعلم المسافة بين كل قريتين.
- الهدف هو أن تكون المدة الزمنية التي يقضيها في جولته أصغر ما يمكن.
- في الواقع لا توجد خوارزمية فعّالة لحل مسألة البائع الجوّال، لذلك سوف نعرض طريقة معقولة إلى حدٍّ ما تمكننا من الحصول على دائرة ليست مثالية بالضرورة.

خطوات الخوارزمية:

1- نوجد دائرة هاملتون بأي طريقة. (اختيار عشوائي من البيان)

2- بما أن البيان موزون نبحث عن تعديل في هذه الدائرة باستبدال أضلاع بأخرى بحيث نحصل على دائرة هاملتون جديدة ذات كلفة أصغرية.

فمثلاً ليكن لدينا البيان:



ولنأخذ الدائرة:

$C = \langle v_1, e_1, v_2, \dots, v_j, e_j, v_{j+1}, \dots, v_1 \rangle$

إذا تحقق الشرط:

$$Cost(e_2) + cost(e_3) < Cost(e_1) + cost(e_4)$$

أي: $e_2 + e_3 < e_1 + e_4$

فإننا نقوم باستبدال الضلعين e_1, e_4 بالضلعين e_2, e_3

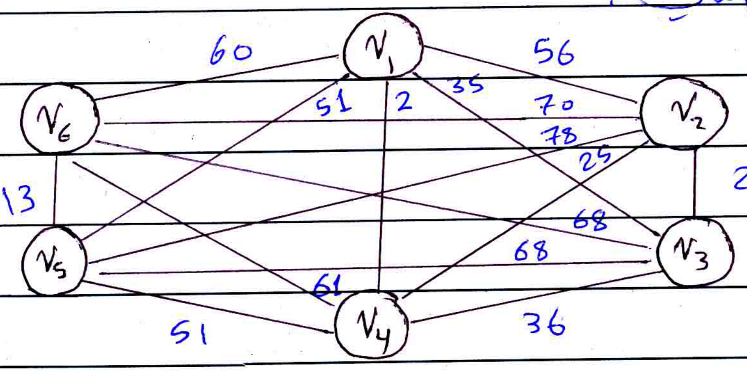
فينتج لدينا دائرة جديدة C' بحيث:

$$Cost(C') < Cost(C)$$

3- نكرر التعديل السابق حتى نصل إلى حالة لا يمكن التحسين أكثر بعدها.

ملاحظة: السؤال بهذه الصيغة قد لا يأتي كاملاً في الامتحان، وفي حال وروده في الامتحان يطلب منا تعديل واحد أو تعديلان، ويكون السؤال واضحاً ويتم إعطاؤنا دائرة هاملتون الابتدائية المراد الانتقال منها.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



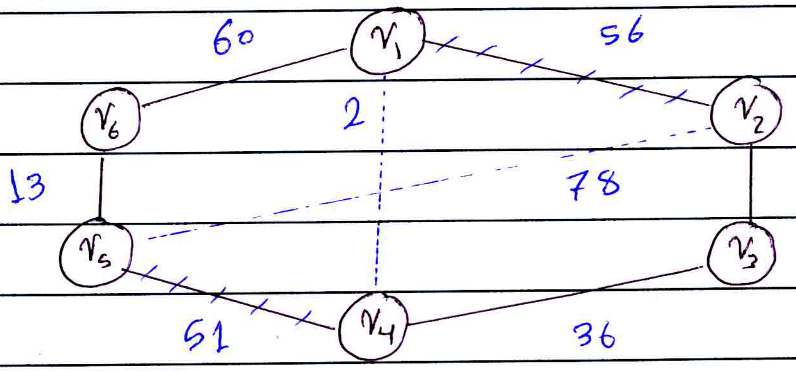
نأخذ دائرة هاملتون ما، ولنأخذ الدائرة الخارجية للسهولة:

$$C = < v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1 >$$

وكلفتها:

$$Cost(C) = 56 + 21 + 36 + 51 + 13 + 60 = 237$$

نبحث عن تعديل ((زوج من الأضلاع يمكن استبداله بحيث تنقص الكلفة)):



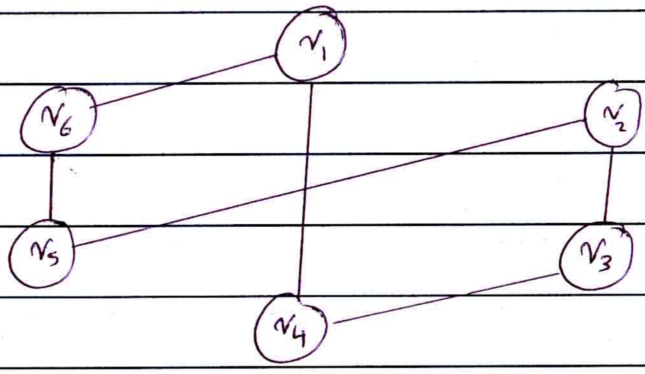
حيث أن:

$$W(v_1, v_2) + W(v_4, v_5) = 56 + 51 = 107$$

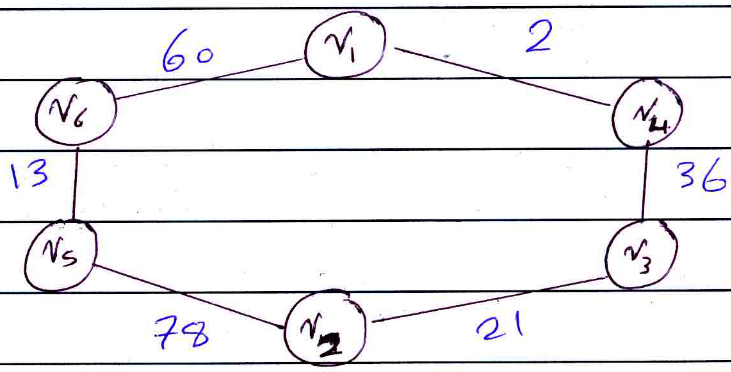
$$W(v_1, v_4) + W(v_2, v_5) = 2 + 78 = 80$$

$$80 < 107$$

تصبح الدائرة بعد التعديل:



نعدّل الرسم للوضوح:



الدائرة بعد التعديل هي:

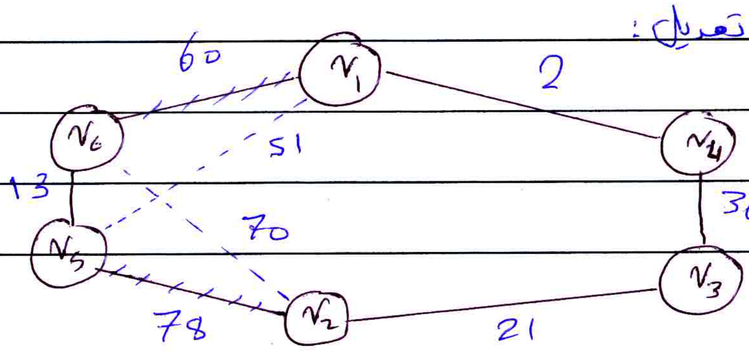
$$C' = \langle v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_6, v_1 \rangle$$

كلفتها:

$$Cost(C') = 2 + 36 + 21 + 78 + 13 + 60 = 210$$

((نلاحظ أن $Cost(C') < Cost(C)$))

بنفس الطريقة نبحث عن تعديل:



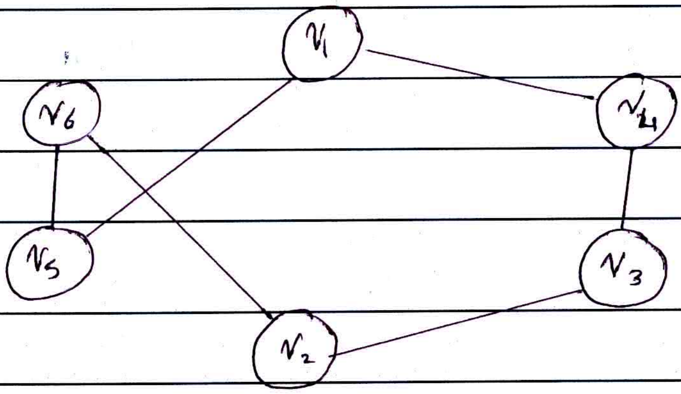
وذلك لأنّ :

$w(v_1,v_6) + w(v_2,v_5) = 60 + 78 = 138$

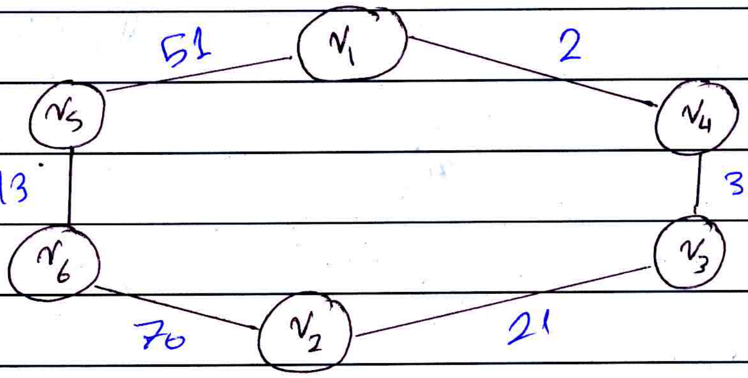
$w(v_1,v_5) + w(v_2,v_6) = 51 + 70 = 121$

$138 > 121$

فتصبح الدائرة بعد التعديل :



نعدّل الرسم :



الدائرة بعد التعديل هي :

$C'' = \langle v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5 \rangle$

كلفتها :

$Cost(C'') = 2 + 36 + 21 + 70 + 13 + 51 = 193$

- نتابع بنفس الطريقة حتى نصل إلى دائرة أقل كلفة ((دائرة لا يمكن استبدال أضلاعها وإنقاص كلفتها))

Postman problem مشكلة ساعي البريد

- هي مسألة تمر على جميع أضلاع البيان دون تكرار (لكن يمكن تكرار العقد)
- الهدف هو إيجاد أقصر طريق أو أصغر دائرة تمر بجميع الأضلاع وتحقق الهدف المطلوب. (إذاً الدائرة المطلوبة هي دائرة أويلر).

حيث يحمل ساعي البريد الرسائل من مكتب البريد ويرتبها وينطلق بها لتوزيعها ثم يعود للمكتب، إذاً يجب عليه أن يغطي جميع الشوارع التي يوجد فيها أصحاب الرسائل.

ويهدف ساعي البريد لتحقيق مهمته بأقل مسافة ممكنة.

- نطبق نظرية البيان لحل هذه المسألة، كل عنوان يقابل عقدة، المسافة بين عقدة وأخرى محسوبة بالأمتار، ونعتبر مكتب البريد عقدة أيضاً، وبالتالي البيان الذي سنحصل عليه هو بيان موزون والمطلوب إيجاد دائرة مثالية.

خطوات الخوارزمية:

إذا كان البيان المعطى بيان أويلر فإن الدائرة المثالية هي دائرة أويلر التي تمر بجميع عقد البيان وجميع أضلاعه دون تكرار الأضلاع، نوجدها وفق الخوارزمية:

Fleury Algorithm خوارزمية فلوري

1- نختار عقدة عشوائية، ولتكن v_0.

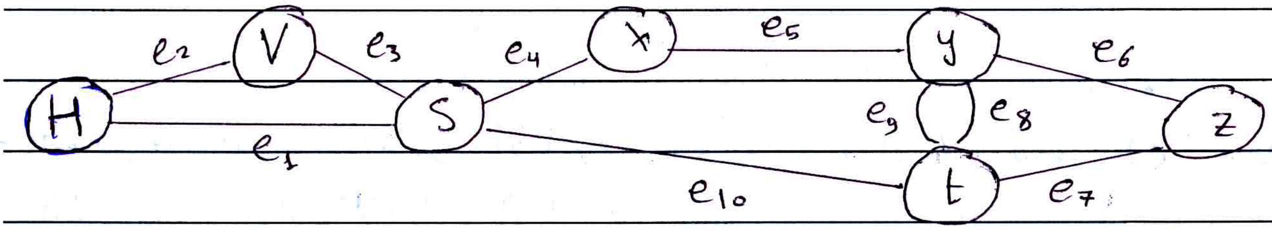
2- نفترض أننا اخترنا مساراً مثل:

$W_i = < v_0 , v_1 , v_2 , \dots , v_i >$

نختار الضلع e_{i+1} بحيث لا يكون هذا الضلع جسراً، إلا إذا لم يكن لدينا خيار آخر.

3- نكرر الخطوة الثانية حتى لا يعود بإمكاننا تكرارها.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



المطلوب إيجاد دارة أويلر ذات الكلفة الأصغرية.

نلاحظ أنّ جميع عقد البيان زوجية وبالتالي فهو بيان أويلر.

لنبدأ بالعقدة V ، حيث V تؤثّر على العقدة S بـ e_3 وعلى العقدة H بـ e_2.

بفرض أننا اخترنا S ، يصبح المسار:

$W_1 = \langle V, e_3, S \rangle$

ننتقل إلى العقدة S ، حيث S تؤثّر على كلٍّ من:

H بـ e_1 ، X بـ e_4 ، t بـ e_{10}

لكن نلاحظ أنّ الضلع e_1 جسر ((بعد الطرح e_3)) لذلك لا نختاره ، فيبقى لدينا e_4, e_{10} في البيان $G' = G - \{e_3\}$

نختار e_{10} مثلاً ، فنصل إلى العقدة t ويصبح المسار:

$W_2 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t \rangle$

نلاحظ أنّ t تؤثّر على Z بـ e_7 ، وعلى y بكلٍّ من e_8, e_9 في البيان

$G'' = G - \{e_3, e_{10}\}$

نختار e_7 فيصبح المسار:

$W_3 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z \rangle$

ونصل إلى العقدة Z ، حيث Z تؤثّر على y بـ e_6 في البيان $G''' = G - \{e_3, e_{10}, e_7\}$

فيصبح المسار:

$W_4 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y \rangle$

ونصل إلى العقدة y ، حيث y تؤثّر على t بكلٍّ من e_8 و e_9 ، وتؤثّر على X بـ e_5 في البيان $G'''' = G - \{e_3, e_{10}, e_7, e_6\}$

نلاحظ أن e_5 جسر في البيان G'' ، فنختار e_8 .

يصبح المسار :

$W_5 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t \rangle$

نصل إلى العقدة t ونأخذ الضلع e_9 ونعود إلى العقدة y .

((لا مشكلة في هذه النتائج لأنه يمكن تكرار العقد في مسألة ساعي البريد ولا يمكن تكرار الأضلاع فقط))

يصبح المسار :

$W_6 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t, e_9, y \rangle$

يبقى اختيار الضلع e_5 من y فنصل إلى العقدة X عبر المسار :

$W_7 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, X \rangle$

من X يبقى الضلع e_4 والذي تؤثر فيه على العقدة S ، إذاً نصل إلى S

ويصبح المسار :

$W_8 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, X, e_4, S \rangle$

من S يبقى الضلع e_1 الذي يوصلنا إلى العقدة H عبر المسار :

$W_9 = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, X, e_4, S, e_1, H \rangle$

ونأخذ من H الضلع e_2 الذي تؤثر فيه على V ، وبذلك يكون المسار النهائي :

$W = \langle V, e_3, S, e_{10}, t, e_7, Z, e_6, y, e_8, t, e_9, y, e_5, X, e_4, S, e_1, H, e_2, V \rangle$

وهي دارة أويلر المطلوبة .

انتهت المحاضرة