المحاضرة الثانية عشرة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: التمثيل الوسيطي الطبيعي لوسيط طبيعي.

نظري ▬ عملي ▬

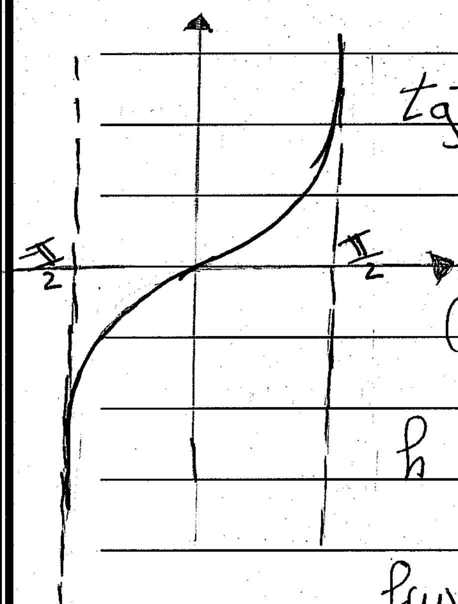
* تمرين: أثبت وجود دالة غامرة ومستمرة ومتزايدة للفترة $]-\infty,\infty[$ على $]0,1[$

* الحل:

$$]-\infty,\infty[\longrightarrow]0,1[$$

$$tg =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty,\infty[$$

دالة غامرة ومستمرة متزايدة ضمن تقابل وبواجهة الاطراد / التزايد /



$$tg^{-1} =]-\infty,\infty[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

tg^{-1} متزايدة لأن

$$(tg^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$$

$$h :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]0,1[$$

$$h(u) = \frac{u+\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

وهي غامرة مستمرة ومتزايد على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$h'(u) = \frac{1}{\pi} > 0 \quad \forall u \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

$$]-\infty,\infty[\xrightarrow{g^{-1}}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\xrightarrow{h}]0,1[$$

$$h\circ g^{-1} :]-\infty,\infty[\longrightarrow]0,1[$$

تركيب دالتين مستمرتين غامرتين ومتزايدتين بالتأكيد دالة مستمرة غامرة ومتزايدة

*تمرين: اثبت أن التمثيلين الوسيطين الآتيين متكافئين:

$t \xmapsto{\vec{r}_1} (\ln(t), \sin(\ln t), t) \qquad 0<t<\infty$

$\tau \xmapsto{\vec{r}_2} (\tau, \sin\tau, e^\tau) \qquad -\infty<\tau<\infty$

*الحل:

لنأخذ الدالة $\phi :]-\infty,\infty[\xrightarrow{\vec{r}_1}]0,\infty[$

$\tau \xmapsto{\vec{r}_2} e^\tau$

مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً

$\vec{r}_1 \circ \phi(\tau) = (\ln(e^\tau), \sin\ln(e^\tau), e^\tau)$

$= (\tau, \sin\tau, e^\tau) = r_2(\tau)$

$\Longrightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

* التمثيل الوسيطي الطبيعي لوسيط الطبيعي:

ليكن $\vec{r} : I \longrightarrow R^3$ تمثيلاً وسيطياً مستمراً على I و $[a,b] \subseteq I$

نسمي تجزئة للمجال $[a,b]$ كل مجموعة:

$P = \{t_0 = a, t_1, \dots\dots\dots t_n = b\} \subseteq [a,b]$

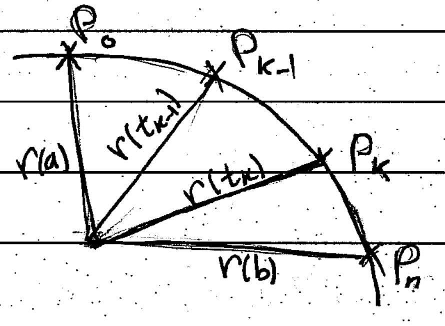
تحقق المتراجحات التالية:

$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots\dots < t_n = b$

لنقرن كل تجزئة P لـ $[a,b]$ بالمجموع

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})\|$$

نرمز P_k لرأس متجه $r(t_k)$



$$\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})=\overrightarrow{P_{k-1}P_n}$$

$$\|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})\| = l([P_{k-1}P_k])$$

ان مسار S_p هو طول الخط المضلع الذي رؤوسه هي
$P_0, P_1, \ldots\ldots, P_n$

نسمي الحد الأعلى الأصغري $\sup S_p$ على جميع تجزئات $[a,b]$ طول التمثيل $\vec r$ في مجال $[a,b]$

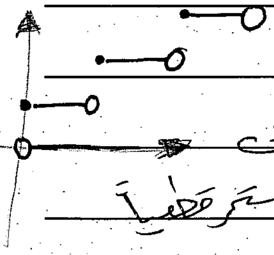
* اذا كان $\sup S_p < \infty$ فنقول ان التمثيل $\vec r$ قابل للقياس في مجال $[a,b]$ وانه طريق في مجال $[a,b]$
* اذا كان $I=[a,b]$ ففي التمثيل $\vec r$ طريقاً ((قابلاً للقياس)) ونرمز لطوله بـ $l(\vec r)$
* دالة مستمرة قطعياً على مجال:

نقول عن دالة انها مستمرة قطعياً على مجال I اذا كانت مستمراً على كامل مجال باستثناء عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع من النوع الأول.
نقطة الانقطاع من نوع الأول هي نقطة النهاية من اليمين عندها محدودة والنهاية من اليسار عندها محدودة الا انها غير متساويتان

* نقول عن دالة انها مستمرة قطعياً محلياً على مجال اذا كانت مستمرة قطعياً على مجال I اذا كانت على كل مجال متراص جزئي من منطلقها

مثال: $\frac{1}{x}$ عند نقطة صفر يوجد انقطاع وعندها تقفز من $-\infty$ الى $+\infty$ نسميها هذه قفزة بـ القفزة اللانهائية ولا استطيع ان اسميها مستمر قطعياً.

تمرين:



هل تابع الجزء الصحيح مستمر قطعياً على R ؟؟
مستمر قطعياً محلياً لان عدد نقاط نقطاعه غير منتهي لو اخذت مجال جزئي محدد ستكون نقاط الانقطاع منتهية وسيكون مستمر قطعياً

*مبرهنة (1) :

اذا كانت f دالة حقيقية مستمرة قطعياً محلياً على مجال I فإن دالة معرفة على I بمساواة التالية :

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\,du$$

حيث بانقطة كيفية مستمرة على I إلا أنها مثبتة وقابلة للاشتقاق عند كل نقطة من مجموعة استمرار الدالة f وان

$$\frac{dF}{dt} = f(t)$$

عند كل نقطة t من نقاط استمرار الدالة f

★★★ انتهت محاضرة ★★★