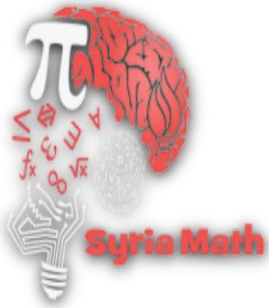

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات النوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنات (فايرشتراس ، ابل ، ديريكليه) + ((مثال على كل مبرهنة).

٢-خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام.

مبرهنة فايرشتراس :

لتكن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على $\mathbb{S}$ وبفرض وجود متسلسلة عددية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة وذات حدود موجبة بحيث يكون :

$$|f_n(x)| < b_n \quad : n \in \mathbb{N} \quad x \in \mathbb{S}$$

عندئذ:

١-) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بإطلاق على $\mathbb{S}$.

٢-) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$.

مثال :

ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

نأخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ المتقاربة وحدودها موجبة حيث :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$$

حسب اختبار فايرشتراس تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ أو على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$.

مبرهنة آبل:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبفرض حدها العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة ومحدودة بعدد ثابت وذلك $\forall\, x \in I$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال: ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2x^2}$ معرفة على $[0,p]$ و $0<p<1$

الحل:

نكتب الحد العام :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.\frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).h_n(x)$$

لنبحث في تحقق شروط آبل:

١) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ هندسية متقاربة بانتظام على $[0,p]$ ومجموعها: $\frac{1}{1-x}$

٢-)المتتالية $\{h_n(x)\} = \left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}$ متناقصة على $[0,p]$ لأن $\frac{1}{1+n^2x^2} > \frac{1}{1+(n+1)^2x^2}$ وحدودها موجبة وهي محدودة :

$$\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \le 1$$

حسب معيار آبل تكون المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على $[0,p]$.

مبرهنة ديريكليه:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبفرض الحد العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

١) متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ محدودة بعدد ثابت وذلك أياً كان $\forall n \in N$.

٢) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة وهي متقاربة بانتظام على I من التابع الصفري $f(x)$ عندئذٍ: تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I.

مثال: ادرس تقارب متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ على المجال $]0,1[$

الحل:

نكتب: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).h_n(x)$

نتحقق من شروط ديريكليه:

١)ندرس متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$ أساسها $r = 1$

$$S_n(x) = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^n = \frac{(-x) - (-x)^{n+1}}{1+x}$$

لنوضح كيف وصلنا إلى هذه النتيجة : لدينا :

$$S_n(x) = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^n \ldots . (1)$$

نضرب الطرفين بالأساس $(-x)$:

$$(-x)S_n(x) = (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots + (-x)^{n+1} \ldots (2)$$

بطرح(2)من (1):

$$(1+x)S_n(x) = (-x) - (-x)^{n+1} \Longrightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{(-x)-(-x)^{n+1}}{1+x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{-x}{1+x} = s(x)$$

حيث نهاية $(-x)^{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية هي الصفر

تذكرة: متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية:

$$S_n(x) = \alpha \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

حيث α هو الحد الأول و r هو الأساس.

Syria Math Team

$$\Rightarrow s(x)=\frac{-x}{1+x} \qquad \text{و} \qquad x\in]0,1[$$

$$|S_n(x)|=\left|\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \underset{\text{بحذف المقام يكبر المقدار}}{\leq} |-x-(-x)^{n+1}| \underset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\leq} |x|+|x|^{n+1}$$

$$1+1<2$$

المتسلسلة محدودة على $]0,1[$.

٢) المتتالية $\{h_n(x)\}$ حيث $h_n(x)=\frac{1}{n}$ متناقصة وحدودها موجبة ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام حسب مبرهنة ديريكليه .

خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام

مبرهنة ١: لتكن متسلسلة التوابع المستمرة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I فإن مجموع المتسلسلة $S(x)$ تابع مستمر على I : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$

مبرهنة 2 : لتكن متسلسلة التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $I=[a,b]$ متقاربة بانتظام على المجال I عندئذ يمكن مكاملتها حداً حداً على المجال I.

فإذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$ مستمرة على I و $f_n(x)$ توابع قابلة للمكاملة على $I=[a,b]$ فإن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx=\int_a^b s(x)\,dx$$

مبرهنة 3 :

لتكن لدينا المتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال $I=[a,b]$ بحيث يتحقق ما يلي :

١- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة ومجموعها $S(x)$ على I
٢- التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة ل x على I
٣- التوابع (المشتقات) $f_n'(x)$ توابع مستمرة على I
٤- متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام على I عندئذٍ يمكن اشتقاق $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حداً حدا في كل نقطة من I ونكتب :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) \qquad \forall x \in I \qquad (**)$$

مثال : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ متسلسلة التوابع معرفة على $I = [0, q]$ و $0 < q < 1$

وهي متسلسلة هندسية متقاربة بانتظام من أجل $|x| < 1$ على I ومجموعها $s(x) = \frac{1}{1-x}$

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \ldots *$$

نلاحظ أن جميع الحدود مستمرة والمتسلسلة متقاربة بانتظام وبالتالي:

نستطيع مكاملتها حداً حدا

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n\, dx = \int_0^x (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + ..)\, dx$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x dt + \int_0^x t\, dt + \int_0^x t^2\, dt + \int_0^x t^3\, dt + \cdots$$

$$\Rightarrow -ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$-ln|1-x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

نشتق المعادلة * :

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو // تنسيق: ولاء الأخضر

Syria Math Team