

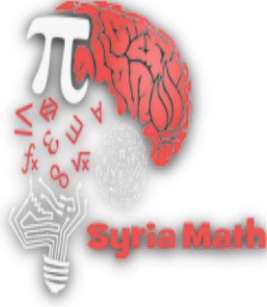
10-10-2018

نظري

◀ دكتوراة الملاءة: هدى شواط

عنوان المحاضرة: تنمته في الحركة الدورانية

◀ المحاضرة: الخامسة



ستتابع معكم زملائي في بحثنا عن الحركة الدورانية وسنأخذ مثال شامل عنها ..

الحركة المماسية لحركة دورانية حول محور ثابت

تعريف: إذا انعدمت سرع جميع نقاط مستقيم متماسك مع الجسم الصلب في لحظة واحدة فقط نقول إن حركة الجسم في هذه اللحظة تكون مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت .

مثال:

تتحرك أسطوانة دائرية نصف قطرها (R) حول محورها الثابت ومعادلة حركتها هي :

$$\varphi = a \log \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right) ; \quad \text{ثوابت } a, \omega_0$$

المطلوب:

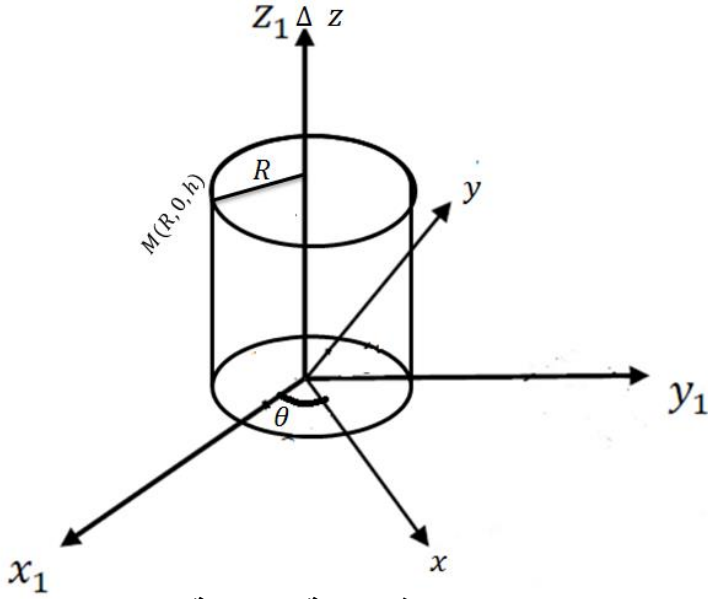
- 1) عين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي للجسم .
- 2) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R .
- 3) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي .
- 4) تعيين القيمة العددية لسرعة والتسارع عندما t تسعى إلى اللانهاية .

الحل

من نص المسألة نستنتج **نوع الحركة** وهي حركة دورانية ((تتحرك أسطوانة حول محور ثابت))
 نختار **جملة المحاور الثابتة** (o_1, x_1, y_1, z_1) بحيث $(o_1 z_1)$ منطبق على محور الأسطوانة
 وأيضا نختار **جملة المحاور المتماسكة** مع الأسطوانة (o, x, y, z) بحيث (oz) منطبق على محور
 الأسطوانة وأيضا (o_1) منطبق على (o) و حيث $\vec{k}_1 = \vec{k}$
 و (R) هو نصف قطر قاعدة الأسطوانة وليكن (h) ارتفاع الأسطوانة ..
 نختار النقطة (M) من القاعدة العلوية بحيث مسقطها على (ox) و (oz) هو $M(R, o, h)$ وهي
 مركباتها على الجملة المتحركة .

ملاحظة: إذا لم يذكر في نص سؤال أي جملة نستخدم لنا الحرية في اختيار الجملة المناسبة .

تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي



$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}_1 = \varphi' \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = a \frac{\frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0 t}{a}}}{1 + \frac{\omega_0 t}{a}} \vec{k}_1 = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0 t}{a}} \vec{k}_1$$

$$\vec{\varepsilon} = \omega' \vec{k}_1 = \frac{-\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2} \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon} = \frac{-\omega_0^2}{a \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right)^2} \vec{k}_1$$

بما أن $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ بجهتين متعاكستين ((أي السرعة موجبة والتسارع سالب)) فالحركة متباطئة .

تعيين سرعة وتسارع نقطة (M) تبعد عن محور الدوران بالمقدار (R)

في " الجملة المتماسكة " R, h ثوابت غير تابعة للزمن للنقطة (M)

$$\forall M \in S ; \vec{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{oM} = R\vec{i} + h\vec{k}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{oM} \Rightarrow \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R & 0 & h \end{vmatrix} = R\omega\vec{j}$$

سرعة النقطة M

$$\vec{v}(M) = R\omega\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega & 0 \end{vmatrix}$$

تسارع النقطة M

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = -R\omega^2\vec{i} + R\varepsilon\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_N(M) = -R\omega^2\vec{i} , \quad \vec{\Gamma}_T(M) = R\varepsilon\vec{j}$$

بحيث :

تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي في " الجملة المتماسكة "

$$|\vec{\Gamma}_T(M)| = \sqrt{(R\varepsilon)^2} = R\varepsilon$$

$$|\vec{\Gamma}_N(M)| = \sqrt{(-R\omega^2)^2} = R\omega^2$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

في " الجملة الثابتة " إن مسقط $M(R, 0, h)$ على ox و oz هو :

$$\begin{aligned} \vec{oM} &= R\vec{i} + h\vec{k} & ; & \quad \vec{k} = \vec{k}_1 \\ \vec{oM} &= R(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1) + h\vec{k}_1 \\ \vec{oM} &= R\cos\varphi\vec{i}_1 + R\sin\varphi\vec{j}_1 + h\vec{k}_1 \end{aligned}$$

يمكننا الاشتقاق مباشرة في الجملة الثابتة :

$$\vec{v}(M) = \begin{cases} x'_1 = -R\omega\sin\varphi \\ y'_1 = R\omega\cos\varphi \\ z'_1 = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{v}(M)| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\varphi + R^2\omega^2\cos^2\varphi} = \omega R$$

وإما عن طريق تطبيق القانون التالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{oM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = -R\omega\sin\varphi\vec{i}_1 + \omega R\cos\varphi\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(M)| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\varphi + R^2\omega^2\cos^2\varphi} = \omega R$$

وهي تمثل عبارة شعاع السرعة في الجملة الثابتة .

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega\sin\varphi & R\omega\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-R\varepsilon\sin\varphi\vec{i}_1 + R\varepsilon\cos\varphi\vec{j}_1) + (-R\omega^2\cos\varphi\vec{i}_1 - \omega^2R\sin\varphi\vec{j}_1)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = (-R\varepsilon\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi)\vec{i}_1 + (R\varepsilon\cos\varphi - \omega^2R\sin\varphi)\vec{j}_1$$

عبارة شعاع التسارع في الجملة الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = R\varepsilon(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1) - \omega^2R(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1)$$

ومنه التسارع المماسي هو :

$$\vec{\Gamma}_T(M) = R\varepsilon(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1)$$

والتسارع الناطمي هو :

$$\vec{\Gamma}_N(M) = -\omega^2R(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1)$$

تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي في " الجملة الثابتة "

القيمة العددية للتسارع المماسي :

$$|\vec{\Gamma}_T(M)| = \sqrt{R^2\varepsilon^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \varepsilon R$$

القيمة العددية للتسارع الناظمي :

$$|\vec{\Gamma}_N(M)| = \sqrt{\omega^4 R^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \omega^2 R$$

ومنه تكون القيمة العددية للتسارع الكلي هي :

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{\Gamma_T^2(M) + \Gamma_N^2(M)} \Rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

القيمة العددية للسرعة عندما (t) تسعى للانهاية

$$\vec{v}(M) = \omega R \vec{j} \Rightarrow |\vec{v}(M)| = \omega R$$

$$|\vec{v}(M)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{ومنه نجد أن}$$

$$\omega \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{إن}$$

القيمة العددية للتسارع عندما (t) تسعى للانهاية :

لدينا $\varepsilon \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ومنه نجد أن :

$$|\vec{\Gamma}(M)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

أي أن الحركة متباطئة إلى أن تنعدم .

وظيفة : يتحرك جسم صلب بحركة دورانية حول محور ثابت ومعادلة الحركة هي :

$$\theta = a \left[t + \frac{1}{b} (e^{-bt} - 1) \right] ; \quad a, b \text{ ثوابت}$$

المطلوب :

- (1) عين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي للجسم .
- (2) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R .
- (3) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي .
- (4) تعيين القيمة العددية لسرعة والتسارع عندما t تسعى إلى اللانهاية .

انتهت المذاكرة

إعلان: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي

مَا أَخَذَ اللَّهُ عَلَى أَهْلِ
الْجَهْلِ أَنْ يَتَعَلَّمُوا حَتَّى
أَخَذَ عَلَى أَهْلِ الْعِلْمِ أَنْ
يُعَلِّمُوا