25-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: العاشرة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الغير تامة وعوامل التكميل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المعادلات التفاضلية الغير تامة وعوامل التكميل

٢ـ طريقة إيجاد عوامل التكميل

المعادلات التفاضلية غير التامة (عوامل التكميل)

تعريف: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{M(x,y).dx+N(x,y).dy=0\ \dots(1)}$$

معادلة تفاضلية غير تامة أي:

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

عندها نوجد دالة $\mu(x,y)$ بحيث إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) أصبحت تامة حيث $\mu(x,y)$ تسمى **عامل التكميل.**

$$\Rightarrow \mu(x,y).M(x,y).dx+\mu(x,y).N(x,y).dy=0$$

$$\frac{\partial[\mu(x,y).M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu(x,y).N(x,y)]}{\partial x}$$

وللاختصار نرمز ب M,N,μ بدلا من $M(x,y),N(x,y),\mu(x,y)$.

$$\Rightarrow M.\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu.\frac{\partial M}{\partial y}=N.\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu.\frac{\partial N}{\partial x}$$

الآن نعزل الحدود التي فيها μ :

$$M.\frac{\partial\mu}{\partial y}-N.\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}]$$

وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان μ عامل التكميل تابع ل x فقط أي أنّ:

$$\mu(x,y)=\mu(x)\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow -N.\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]\Rightarrow -N.\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\mu[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}]$$

$$\Rightarrow N.\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]\Rightarrow\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mu}=\frac{[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}]}{N}$$

الآن نرمز للطرف الأيمن من المساواة الأخيرة بالرمز $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}]}{N}\quad *$$

$$\frac{\partial\mu}{\mu.\partial x}=\frac{[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}]}{N}\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\mu}=\frac{[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}]}{N}.\partial x$$

والآن نكامل:

$$ln|\mu|=\int\varphi(x).\partial x\ \Rightarrow\mu=e^{\int\varphi(x).\partial x}$$

وهكذا نجد أنّ عامل التكميل μ تابع ل x فقط.

الحالة الثانية: إذا كان عامل التكميل تابع ل y فقط أي أنّ:

$$\mu(x,y)=\mu(y)$$

$$M.\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]\Rightarrow -M.\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mu}=\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{-M}$$

نرمز للمقدار في المساواة الأخيرة في الطرف الأيمن بالرمز $\varphi(y)$ أي:

$$\varphi(y)=\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{-M}\quad **$$

والآن نعوض $\varphi(y)$ لنحصل على:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(y).dy \Rightarrow \ln|\mu| = \int \varphi(y).dy$$

فيكون عامل التكميل التابع ل y فقط هو: $\mu(y) = e^{\int \varphi(y).dy}$

والآن لنستعين ببعض الأمثلة لتدعيم ما سبق من أفكار:

مثال1: أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية التالية ثم أوجد الحل العام:

$$(1 - x^2y).dx + x^2(y - x).dy = 0 \;...\;(1)$$

الحل:

أولاً: لنبرهن أنّها ليست تامة:

$$M(x,y) = 1 - x^2y \Rightarrow \frac{dM}{dy} = -x^2$$

$$N(x,y) = x^2(y - x) \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 2xy - 3x^2$$

نلاحظ أنّ: $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$ أي أنّ المعادلة التفاضلية ليست تامة.

لنوجد عامل التكميل و ذلك بالتجريب أولا نجرب (*) ثم (**) و لكن اذا أوجدنا عامل التكميل تابع ل x من * فلا داعي للإكمال و تجربة **

$$\frac{[\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}]}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2.(y - x)} = \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y - x)}$$

$$\varphi(x) = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)} = \frac{-2}{x} \;;\; \varphi(x) = \frac{[\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}]}{\mu}$$

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x).dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

فيكون عامل التكميل هو: $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

و منها لا داعي لتجربة ** كوننا وجدنا عامل التكميل تابعا ل x

أوجدنا عامل التكميل والآن نضرب المعادلة (1) بكامل التكميل لتصبح تامة

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}.(1-x^2y).dx+(y-x).dy=0$$

هي معادلة تفاضلية تامة لنوجد الحل العام لها...

$$F(x,y)=\int N(x,y).dy+\varphi(x)$$

$$=\int (y-x).dy+\varphi(x)=\frac{1}{2}y^2-xy+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-y+\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}(1-x^2y)=\frac{1}{x^2}-y$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)=\frac{1}{x^2}\xRightarrow{\text{نكامل}}\varphi(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\frac{1}{2}y^2-xy-\frac{1}{x}=c$$

وهو الحل العام المطلوب.

ولدينا طريقة أخرى لإيجاد الحل العام ألا وهي طريقة <u>التفاضل التام</u>:

$$\frac{1}{x^2}.dx-y.dx+y.dy-x.dy=0$$

$$\frac{1}{x^2}.dx+y.dy-(y.dx+x.dy)=0$$

$$d\left(-\frac{1}{x}\right)+d\left(\frac{1}{2}y^2\right)-d(x.y)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}y^2-x.y=c$$

وهو الحل العام المطلوب.

$$(6xy+3y^2x+x^3).dy+3(x^2+y^2).dx=0$$

الحل:

$$M(x,y)=3(x^2+y^2)\Rightarrow\frac{dM}{dy}=6y$$

$$N(x,y)=6xy+3y^2x+x^3\Rightarrow\frac{dN}{dx}=6y+3y^2+3x^2$$

أي أنّ المعادلة ليست تامة.

$$\frac{[\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}]}{-M}=\frac{6y-6y-3y^2-3x^2}{-3(x^2+y^2)}=\frac{-3(y^2+x^2)}{-3(x^2+y^2)}=1$$

فيكون: $\varphi(y)=1$

و منه نوجد عامل التكميل:

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y).dy}=e^{\int dy}=e^y\Rightarrow\mu(y)=e^y$$

نضرب المعادلة التفاضلية ب عامل التكميل فينتج:

$$e^y(6xy+3y^2x+x^3).dy+3e^y(x^2+y^2).dx=0$$

أصبحت المعادلة تامة لنوجد الحل العام لها:

$$F(x,y)=\int N(x,y).dx+\varphi(y)=\int(6xye^y+3y^2xe^y+e^yx^3).dx+\varphi(y)$$

$$=6ye^y+3y^2e^y+3e^yx^2+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=6e^y+6ye^y+6ye^y+3y^2e^y+3x^2e^y+6xe^y+\varphi'(y)=3e^yx^2+3y^2e^y$$

$$\Rightarrow\varphi'(y)=-6e^y-12ye^y-6xe^y\overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow}\varphi(y)=-6ye^y-6y^2e^y-6xye^y$$

$$\Rightarrow F(x,y)=6ye^y+3y^2e^y+3x^2e^y-6ye^y-6y^2e^y-6xye^y$$

$$\Rightarrow F(x,y)=3e^yx^2-6xye^y-3=c$$

و هو الحل العام المطلوب.

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y).dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x).dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \Rightarrow \frac{dM}{dy} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 2xy^4e^y + x^2y^4e^y - 2xy^2 - 3$$

نلاحظ أنّ: $\frac{dN}{dx} \neq \frac{dM}{dy}$ فالمعادلة التفاضلية ليست تامة.

$$\frac{\left[\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right]}{-M} = \frac{8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 - 2xy^4e^y + 2xy^2 + 3}{-(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)}$$

$$= \frac{-8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{-4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -\frac{4}{y}$$

$\varphi(y) = -\frac{4}{y}$ و منه نوجد عامل التكميل:

$$\mu(y) = e^{\int \varphi(y).dy} = e^{-4\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y^{-4}} \Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{y^4}$$

و هو عامل التكميل نضرب المعادلة التفاضلية به لتصبح تامة:

$$\frac{1}{y^4}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y).dx + \frac{1}{y^4}(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x).dy = 0$$

$$\Rightarrow 2xe^y.dx + \frac{2x}{y}.dx + \frac{dx}{y^3} + x^2e^y.dy - \frac{x^2}{y^2}.dy - \frac{3x}{y^4}.dy = 0$$

نلاحظ أنّ الحدود المتقابلة لهما نفس التكامل على اختلاف المتغير الذي نكامل من أجله أي أنّ:

$$\int 2xe^{y}.dx = \int x^{2}e^{y}.dy$$

وبالتالي:

$$\int 2xe^{y}.dx + x^{2}e^{y}.dy + \left(-\frac{x^{2}}{y^{2}}.dy + \frac{2x}{y}.dx\right) + \left(\frac{dx}{y^{3}} - \frac{3x}{y^{4}}.dy\right) = \int 0$$

وبالتالي يكون الحل العام هو:

$$F(x,y) = 2x^{2}e^{y} + \frac{2x^{2}}{y} + \frac{2x}{y^{3}} = c$$

وظيفة:

$$(x^{2} - y^{2} + 2x)dx + (x^{2} - y^{2} - 2y)dy = 0$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد*عُلا الدالاتي*

تنسيق: ولاء الأخضر