المحاضرة التاسعة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تعاريف وبعض التمارين

نظري

عملي

* تعاريف :

* نقول عن دالة سلمية أو متجهية القيمة أنها من صنف C_n على مجال مغلق $[a,b]$ اذا وفقط اذا وجد لها ممدد من الصنف C_n على مجال مفتوح يحوي مجال $[a,b]$

* نقول عن دالة سلمية حقيقية أو متجهية القيمة أنها من صنف C_∞ اذا وفقط اذا كانت من الصنف C_n أياً كانت n

* نقول عن مجال مفتوح من صنف C_∞ اذا وجد واحد على الأقل من تمثيلات معرف على مجال مفتوح.

* ملاحظة :

اذا كانت الدالة من الصنف C_n فإنها من صنف C_k $\forall k \le n$

* C_0 هو صنف الدوال المستمرة هو أوسع صنف لدينا

$$C_\omega \subseteq \dots \subseteq C_\infty \subseteq \dots C_n \subseteq \dots C_k \subseteq \dots C_2 \subseteq C_1 \subseteq C_0$$

حيث C_ω صنف دوال التحليلية.

* نقول عن منحني مفتوح انه نظامي اذا كان بين تمثيلاته واحد على الأقل

$$\vec{r} :]a,b[\to R^3$$

قابلاً للاشتقاق وكان $r'(t) \neq 0$ $\forall t \in]a,b[$

* نقول عن منحني مفتوح انه نظامي من صنف C_n حيث $(n \ge 1)$ اذا كان بين تمثيلاته واحد على الأقل $\vec{r}$ من صنف C_n وكان مشتقه غير معدوم

$$\forall t \in]a,b[\qquad r'(t) \neq 0$$

* ملاحظة: من الواضح ان منحني نظامي من صنف C_n هو منحني نظامي و من صنف C_n والعكس غير صحيح.

* نقول عن منحني متراص انه من صنف C_n اذا وجد بين تمثيلاته $\vec{r} : [a,b] \to R^3$ من الصنف C_n

* نقول عن منحني L أنه نظامي من الصف C_n قطعياً إذا وجد بين تمثيلاته المسموح بها $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$ يحقق ما يلي:

توجد تجزئة للمجال $[a,b]$ (حيث a و b طرفا I)

لنوجد تجزئة للمجال فلتكن $t_0=a<t_1<\dots<t_m=b$ بحيث تكون المقصورات $\vec{r}$ نظامياً من الصف C_n لأجل كل k تحقق إذا كانت $[t_{k-1},t_k]\subseteq I$ ، $a\notin I$ فإن $\vec{r}$ $]t_0=a,t_1]$

نظامي من الصف C_n بدلاً من $\vec{r}$ و $\vec{r}'(t)\neq 0$ أياً كانت $t\in I\setminus\{t_0,\dots,t_m\}$

هذا يعني أن أن مشتق من مرتبة n لـ $\vec{r}$ سيكون غير مستمر أو غير موجود

أو $\vec{r}'(t)=\vec{0}$ (في مجال وجوده) عند نقاط $(t_0,t_1,\dots,t_m)$ على الأكثر.

((نظامي من صف C_n $\Leftarrow$ نظامي من صف C_n قطعياً))

والعكس غير صحيح

* إذا كان $\vec{r}'$ عند نقطة t_0 يساوي الصفر $\vec{r}'(t)=0$ أو $\vec{r}'$ غير موجود عند t_0

لأجل قيمة t_0 من I فإننا نسمي t_0 رأس المتجه $\vec{r}(t_0)$ أي النقطة P_0 من المنحني المقابلة (الموافقة) لـ t_0 نقطة شاذة للمنحني L بالنسبة للتمثيل أو في التمثيل $\vec{r}$

* ملاحظة: إذا كانت النقطة P_0 الموافقة للقيمة t_0 شاذة بالنسبة لـ تمثيل $\vec{r}$ وغير شاذة بالنسبة للتمثيل آخر مكافئ له فإننا نقول أن P_0 شاذة غير أساسية للمنحني المعرف بصف تكافؤ التمثيلين السابقين

أما إذا كانت النقطة P_0 شاذة بالنسبة لجميع التمثيلات المتكافئة عن صفة مقابلة للوسطاء فإننا نسمي P_0 نقطة شاذة أساسية للمنحني ونقول أن للمنحني شذوذاً أساسياً عند P_0.

* تمارين:

1 اثبت أن أي تمثيل مسموح به لمنحني مفتوح معرف على مجال مفتوح.

الحل: لنرمز بـ L لمنحني مفتوح

L مفتوح $\Leftarrow$ (التعريف) أحد تمثيلاته الوسيطية المسموح بها معرف على مجال مفتوح.

$\vec{r} :]a,b[\longrightarrow R^2$

ولنفرض ان $\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow R^3$ تمثيل وسيطي مسموح به لـ L

$\vec{r}_1 \sim \vec{r} \Leftrightarrow \exists\, \phi :]a,b[\longrightarrow I_1$

غامرة ومستمرة ومتزايدة

$$\phi(]a,b[) =]\lim_{x \underset{>}{\to} a} \phi(x), \lim_{x \underset{<}{\to} b} \phi(x)[$$

$\phi(]a,b[) = I_1$ مجال مفتوح .

ϕ غامرة

* حسب مبرهنة: ليكن $\phi :]a,b[\longrightarrow R$ دالة مستمرة ومطردة تماماً عندئذ بأن:

$$\phi(]a,b[) =]\lim_{x \underset{>}{\to} a} \phi(x), \lim_{x \underset{<}{\to} b} \phi(x)[$$

$$\phi([a,b]) = [\phi(a), \phi(b)]$$

ج) أثبت أن أي تمثيل مسموح به لمنحني متراص معرف على مجال مغلق .

يلزم بـ L لمنحني مغلق

L مغلق $\Leftrightarrow$ (تعريفاً) أحد تمثيلاته الوسيطية المسموح بها معرف على مجال مغلق

$\vec{r} : [a,b] \longrightarrow R^2$

ولنفرض ان $\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow R^3$ تمثيل وسيطياً مسموح به لـ L

$\vec{r}_1 \sim \vec{r} \Leftrightarrow \exists\, \phi : [a,b] \longrightarrow I_1$

غامرة ومستمرة ومتزايدة

$$\phi([a,b]) = [\lim_{x \underset{>}{\to} a} \phi(x), \lim_{x \underset{<}{\to} b} \phi(x)]$$

$\phi([a,b]) = I_1$ مجال مغلق

د) أثبت ان كل منحني متراص يقبل تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به معرفاً على مجال $[0,1]$

* الحل:

لنرمز بـ L لمنحنٍ متراص

L متراص $\Leftrightarrow$ له تمثيلات وسيطية معرف على مجال مغلق وليكن

$$\vec{r} : [a,b] \longrightarrow R^3$$

ولنفرض $\vec{r}^{*} \sim \vec{r}$ ولنثبت أن $\vec{r} : [0,1] \longrightarrow R^3$

$$\exists \phi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$$

$$\phi(\tau) = (b-a)\tau + a$$

ان ϕ مستمرة لأن كثير حدود

ان ϕ غامرة وضوحاً

ϕ متزايدة لأن

$$\forall \tau \in]0,1[\qquad \phi'(\tau) = b-a > 0$$

بما أن ϕ مستمرة فإنها متزايدة على $[0,1]$

بالتالي استطعنا إيجاد ϕ

أن $\vec{r}^{*} = \vec{r} \circ \phi$ تمثيل لـ L مكافئ لـ (r بالذات) هو معرف على مجال $[0,1]$

** انتهت المحاضرة **