تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية (ID) نقول R منطقة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر $0 \neq r \in R \setminus U(R)$ يكتب بالشكل $r = \prod_{i=1}^{n} p_i$ حيث p_i عناصر أولية في R ونرمز لها بـ UFD

مبرهنة: إذا كانت R هي PID فإن R هي UFD.

الإثبات: لتكن $M = \{ \langle r \rangle ; 0 \neq r \in R \setminus U(R) ; r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i ; n \in \mathbb{N} ;$ p_i عناصر غير قابلة للتحليل في $R \}$

لنفرض جدلاً أن $M \neq \emptyset$ عندئذ $(M, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء ولتكن السلسلة المتزايدة $\langle r_1 \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \cdots$ في M

ليكن $I = \bigcup_{i \geq 1} \langle r_i \rangle \triangleleft R$ مثالي في R حسب مبرهنة الاحتواء ومن الفرض لدينا R هي PID فإنه $\exists x \in R : I = \langle x \rangle$ وبالتالي يوجد i_0 بحيث $x \in \langle r_{i_0} \rangle$ ومنه $\langle x \rangle \subseteq \langle r_{i_0} \rangle \subseteq \langle x \rangle$ وبالتالي $\langle x \rangle = \langle r_{i_0} \rangle$ أي أن I حد أعلى للسلسلة في M ومنه حسب تمهيدية زورن يوجد عنصر أعظمي $\langle r \rangle \in M$

$\exists r \in R \setminus U(R) : r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i$ ؛ p_i عناصر غير قابلة للتحليل في R

وبالتالي r قابل للتحليل في R أي أن $\exists s, t \in R \setminus U(R) : r = s.t$

$\Rightarrow \langle r \rangle \subsetneq \langle s \rangle , \langle r \rangle \subsetneq \langle t \rangle$

ولكن $\langle r \rangle$ أعظمي في M فيكون $\langle s \rangle , \langle t \rangle \notin M$

$\Rightarrow \exists p_1, p_2, \dots, p_k \in R : s = \prod_{i=1}^{k} p_i , t = \prod_{i=k+1}^{n} p_i$

$\Rightarrow r = s.t = \prod_{i=1}^{k} p_i$

وهذا غير ممكن ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن $M = \emptyset$

ومنه $\forall 0 \neq r \in R \setminus U(R) : r = \prod_{i=1}^{n} p_i$ حيث p_i عناصر غير قابلة للتحليل ومنه فهي أولية ومنه R هي UFD

تعريف: لتكن R هي UFD و $a_1, a_2, \dots, a_n \in R\setminus\{0\}$

نقول عن $g\in R$ إنه قاسم مشترك أعظمي للعناصر $a_1, \dots, a_n$ إذا تحقق

1) $\forall i\in\{1,\dots,n\} ; g \mid a_i$

2) $t\in R : t\mid a_i ; \forall i\in\{1,\dots,n\} \Rightarrow t\mid g$

ونرمز له بالرمز $g=\gcd(a_1,\dots,a_n)$

2) نقول عن $\ell\in R$ إنه مضاعف مشترك أصغر للعناصر $a_1, \dots, a_n$ إذا تحقق

- $\forall i\in\{1,\dots,n\} ; a_i \mid \ell$
- $t\in R : a_i\mid t ; \forall i\in\{1,\dots,n\} \Rightarrow \ell\mid t$

ونرمز له بالرمز lcm

~~UFD ... R ليست~~

تمرين: لتكن R حلقة واحدية تبديلية

1) بيّن أنه ليس بالضرورة أن يكون لأي عنصرين قاسم مشترك أعظم أو مضاعف مشترك أصغر)

2) إذا كان $g=\gcd(a,b)$ هل يوجد $x,y\in R : g=x.a+b.y$

تمرين: لتكن $R=(Z\sqrt{-3},+,.)$ ، $a=4, b=-2+2\sqrt{-3}$

أوجد $\gcd(a,b)$ وذلك إن أمكن

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية ولتكن $a_1, \dots, a_n\in R\setminus\{0\}$

1) يوجد للعناصر قاسم مشترك أعظم $g\in R$ يكتب بالشكل

$\langle g\rangle=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle \Leftrightarrow g=\sum_{i=1}^{n} r_i a_i ; r_i\in R$

2) لنوجد العناصر مضاعف مشترك اصغر $f \in \mathbb{R}$ إذا كان

$$\langle f \rangle = \bigcap_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \dots \cap \langle a_n \rangle$$

البرهان: 1) لنفرض أن $\exists r_i \in \mathbb{R} : g = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ ، $g = \gcd(a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : g \mid a_i \Rightarrow a_i \in g$

$\Rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \langle g \rangle$

ولنبرهن الاحتواء المعاكس

حسب الفرض $g = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$

ومنه $g \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

من الاحتوائين نحقق المساواة وهو المطلوب.

لنفرض أن المساواة صحيحة ومنه ليكن $g \in \mathbb{R}$

$a_i \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle = g \Rightarrow g \mid a_i \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$

ولكن [illegible] g

$t \in \mathbb{R} : t \mid a_i \Rightarrow a_i \in \langle t \rangle \Rightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \langle t \rangle$

$\Rightarrow \langle g \rangle \subseteq \langle t \rangle \Rightarrow g \in \langle t \rangle \Rightarrow t \mid g$

$\exists r_i \in \mathbb{R} : g = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot a_i$ مما سبق نجد أن

2) $\Leftarrow$ لنفرض أن $f = \operatorname{lcm}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow a_i \mid f$

$\Rightarrow f \in \langle a_i \rangle \Rightarrow \langle f \rangle \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle = I$ نفرضها

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ؛

ليكن $x \in I \Leftarrow x \in \langle a_i \rangle$ وبالتالي $a_i \mid x$ ومنه $f \mid x$

ومنه $x \in \langle f \rangle$ وبالتالي $I \subseteq \langle f \rangle \Leftarrow I = \langle f \rangle$ وذلك

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

ليكن $l \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle$ إذن $l \in \langle a_i \rangle$; $\forall i \in \{1, ..., n\}$

$l \in \langle a_i \rangle \Rightarrow a_i \mid l \; ; \forall i \in \{1, ..., n\}$

وليكن

$t \in R ; a_i \mid t \; ; \forall i \in \{1, ..., n\}$

$\Rightarrow t \in \langle a_i \rangle \; ; \forall i \in \{1, ..., n\}$

$\Rightarrow t \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle \Rightarrow l \mid t$

$\Rightarrow l = lcm(a_1, ..., a_n)$

مبرهنة: ليكن R هي ID

1) $U(R) = U(R[x])$

2) إذا كان r غير قابل للتحليل في R فإن r غير قابل للتحليل في $R[x]$

3) إذا كان r عنصراً أولياً في R فإن r عنصر أولي في $R[x]$

البرهان: 1) ليكن $r \in U(R)$ ومنه يوجد $s \in R$ بحيث $rs = sr = 1$

ولكن $R \subset R[x]$ ومنه $s \in R[x]$ أي أن $r \in U(R[x])$

$\Rightarrow U(R) \subseteq U(R[x])$

ولنثبت الاحتواء المعاكس: ليكن $f(x) \in U(R[x])$ وبالتالي يوجد $g \in R[x]$ بحيث $f(x) \cdot g(x) = 1$ وبما أن R هي ID فإن

$deg(f.g) = deg(f) + deg(g) = deg(1) = 0$

$\Rightarrow f, g \in R \Rightarrow f \in U(R) \Rightarrow U(R[x]) \subseteq U(R)$

ومنه $U(R[x]) = U(R)$

2) بما أنه r غير قابل للتحليل في R فإننا نوجد $f,g \in R$ بحيث: $r = f.g$
وطالما أن R هي ID فإن $\deg(f.g) = \deg(f) + \deg(g) = 0$
وإن $f,g \in R[x]$ وليكن $r \in R[x] \setminus U(R[x])$
وطالما أن r غير قابل للتحليل في R فإن $f \in U(R) = U(R[x])$
$\vee \ g \in U(R) = U(R[x])$
وفي كلتا الحالتين يتم المطلوب

3) r أولي في R، وليكن $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i , g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in R[x] \ ; \ r \mid f.g$
لنفرض جدلاً أن $r \nmid f$, $r \nmid g$ ومنه
$\exists i \in \{0, \dots, n\} : r \nmid a_i$
$\exists j \in \{0, \dots, n\} : r \nmid b_j$
لكن $r \mid c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + \dots$
$\Rightarrow r \mid a_i b_j \Rightarrow r \mid a_i \vee r \mid b_j$
وهذا تناقض ومنه إما $r \mid f$ أو $r \mid g$ ومنه
r عنصر أولي في $R[x]$.

تمهيدية (Gaussian Lemma): لتكن R حلقة تبديلية واحدية إذا كانت R هي UFD فإن $R[x]$ هي UFD.

البرهان: طالما أن R هي ID فإن $R[x]$ هي ID
ليكن $0 \neq f \in R[x]$ حيث $f \notin U(R)$
$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = d.f'(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x^i$

$d = \gcd(a_0, \dots, a_n) \in R \ ; \ a'_i = \frac{a_i}{d}$
$d \in R$ يكتب بشكل وحيد على شكل جداء عناصر غير قابلة للتحليل لأن R هي UFD

وبالتالي لا يكتب بشكل جداء منتهي في $R[x]$ ونفرض كان أن f يكتب على شكل جداء منتهي لعناصر أولية ونأخذ للاستقراء الرياضي على درجة f'

- $n=0 \Leftarrow f' \in R$ يتم المطلوب
- نفرض صحة القضية من أجل أي كثير حدود درجتها أقل من n
- ثم نثبت صحة القضية لأجل n ونميز حالتين

$*$ f' غير قابل للتحليل ومنه $f = d.f'$ حيث $d=\prod_{i=1}^{k} p_i$

وبما أن p_i عناصر غير قابلة للتحليل في R ومنه p_i غير قابلة للتحليل في $R[x]$

ومنه f يكتب على شكل جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل وبشكل وحيد في $R[x]$.

$*$ f' قابل للتحليل في $R[x]$ ومنه يوجد $g,h \in R[x]$ بحيث $f'=g.h$

$0 < \deg(g), \deg(h) < \deg(f')$

حسب الفرض الاستقرائي

$\exists p_1,\dots,p_i,p_{i+1},\dots,p_k \in R[x]$

عناصر أولية في $R[x]$ تحقق $h=p_1\cdots p_i$, $g=p_{i+1}\cdots p_k$

$\Rightarrow f=d.\prod_{i=1}^{k}p_i$

يكتب على شكل جداء منتهي لعناصر أولية في $R[x]$ ومنه $R[x]$ هي UFD

تعميم: إذا كانت R هي UFD فإن $R[x_1,\dots,x_n]$ هي UFD

تمرين: $R=\mathbb{Z}(i)=\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z} ; i^2=-1\}$

بين أنها منطقة إقليدية.

تمرين: ادرس إذا كان $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ هي UFD إذا كان $d\in\{-1,-2\}$

تمرين: R حقل $\Leftarrow$ $R[x]$ هي PID.

ملاحظة: R إقليدية $\Leftarrow$ PID $\Leftarrow$ UFD

[illegible]

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية نقول عن R إنها تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة إذا كانت لأجل أي سلسلة متزايدة من المثاليات في R

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ بحيث $\exists n \in \mathbb{N} ; \forall i \geq n : I_n = I_i$

نقول عن R إنها حلقة نوثرية إذا كانت تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة.

أمثلة:

1) أي حقل هو حلقة نوثرية

2) أي حلقة منتهية هي حلقة نوثرية.

3) إذا كانت R هي PID فإن R نوثرية.

حل رقم 3: لتكن $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ سلسلة متزايدة من المثاليات ولنعتبر $I = \bigcup_{i \geq 1} I_i \trianglelefteq R$ كون R هي ID ومنه يوجد $a \in R$ بحيث $I = \langle a \rangle$ و $a \in I$

$\Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} ; a \in I_{i_0} \Rightarrow \langle a \rangle \subseteq I_{i_0} \subseteq I$

$\Rightarrow I_{i_0} = \langle a \rangle$

$\Leftarrow$ ومنه $\exists i_0 \in \mathbb{N} ; \forall i \geq i_0$ بحيث $I_{i_0} = I_i$

ومنه الحلقة R نوثرية (مثال $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$)

4) $R = \mathbb{Q}[x_i ; i \in \mathbb{N}]$ ليست نوثرية لأن

$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots$

سلسلة متزايدة من المثاليات في R لا تنقطع

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية فإن القضايا التالية متكافئة:

1) R نوثرية

2) كل مثالي في R منتهي التوليد في R

3) كل مجموعة غير خالية في R تحوي عنصراً أعظمياً.

البرهان: $2 \Leftarrow 1$ لنفرض جدلاً يوجد $I \trianglelefteq R$ ليس منتهي التوليد في R
ومنه يوجد $a_1 \in I$ بحيث $\langle a_1 \rangle \subsetneq I$ وأيضاً يوجد $a_2 \in I$ بحيث
$\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1 , a_2 \rangle$ وهكذا نحصل على سلسلة متزايدة من المثاليات غير منتهية
وهذا يناقض الفرض ومنه الفرض الجدلي خاطئ.

$3 \Leftarrow 2$: ليكن $S = \{ I \trianglelefteq R \} \neq \emptyset$ ليكن $I_1 \in S$ إذا كان I_1 أعظمي تم المطلوب
وإذا لم يكن فإنه يوجد $I_2 \in S$ بحيث $I_1 \subsetneq I_2$ إذا كان I_2 أعظمي تم المطلوب
ونكرر العملية فنحصل على سلسلة من المثاليات ونعرف $I = \bigcup_{i \geq 1} I_i \trianglelefteq R$ ، بحسب الشرط الأول
ومن الفرض يوجد $x_1 , \dots , x_n$ بحيث $I = \langle x_1 , \dots , x_n \rangle$

$$\exists\, i_0 \geq 1 : x_1 , \dots , x_n \in I_{i_0}$$

$$\Rightarrow \langle x_1 , \dots , x_n \rangle \subseteq I_{i_0} \subseteq I = \bigcup_{i \geq 1} I_i$$

$$\Rightarrow I_{i_0} = I$$

ومنه $I \in S$ عنصر أعظمي في S.

$1 \Leftarrow 3$: لنفرض $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ سلسلة متزايدة من المثاليات في R
$S = \{ I_i : i \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$ يوجد عنصر أعظمي في S أي $\exists\, n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n$
بحيث $I_i = I_n$ ومنه R نوثرية.

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية، إن القضايا متكافئة:
1) R نوثرية
2) أي مثالي أولي في R يكون منتهي التوليد في R
البرهان: $2 \Leftarrow 1$ مباشرة من تعريف الحلقة النوثرية كل مثالي منتهي التوليد
وبالتالي أي مثالي أولي في R هو منتهي التوليد في R.

$1 \Leftarrow 2$: لنفرض جدلاً أن R ليست نوثرية وبالتالي مجموعة ... تكون المجموعة

لتكن I ليست منتهية التوليد في R : $S=\{I \trianglelefteq R\} \neq \emptyset$ ولتكن $(S,\subseteq)$ مرتبة جزئية

ولتكن السلاسل المتزايدة من عناصر S ... $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ ولنثبت ان لها حد اعلى في S

ان: $I = \bigcup_{i\geq 1} I_i \trianglelefteq R$ ومنه I ليس منتهي التوليد اي $S \ni I$

لانه اذا كان $I \notin S$ فيكون $\exists a_1,a_2,\dots,a_n \in R$ بحيث

$I = \langle a_1,\dots,a_n\rangle = \bigcup_{i\geq 1} I_i$

ومنه يوجد $i_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $a_1,\dots,a_n \in I_{i_0}$ فان

$\langle a_1,\dots,a_n\rangle \subseteq I_{i_0}$

وبما ان I المثالي يحوي $a_1,\dots,a_n$ فيكون $I_{i_0} = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$

ومنه I_{i_0} منتهي التوليد وهذا غير ممكن لان $I_{i_0} \in S$

ومنه I حد اعلى للسلسلة في S وحسب تمهيدة زورن يوجد عنصر اعظمي $J \in S$

وبما ان كل اولي هو منتهي التوليد (حسب الفرض) وطالما ان J ليس منتهي التوليد فهو ليس اولي ومنه $\exists a,b \in R : a\cdot b \in J$

$a \notin J \wedge b \notin J$

ولنعرف المثاليين $b \in \langle J,b\rangle , a \in (J:\langle b\rangle)$

$\Rightarrow J \subsetneq \langle J,b\rangle , J \subsetneq (J:\langle b\rangle)$

وبما ان J اعظمي في S فان $(J:\langle b\rangle), \langle J,b\rangle \notin S$

ومنه هذه المثاليات منتهية التوليد $\exists c_1,c_2,\dots,c_m,d_1,\dots,d_t \in R$

لكي $\langle J,b\rangle = \langle c_1,\dots,c_m\rangle , (J:\langle b\rangle) = \langle d_1,\dots,d_t\rangle$

لنعرف ما يلي

$\forall i \in \{1,\dots,m\} : c_i \in \langle J,b\rangle \Rightarrow c_i = a_i + b r_i : r_i \in R, a_i \in J$

$\langle J,b\rangle = \langle a_1,\dots,a_m,b\rangle$

ولنعرف المثالي $K = \langle a_1,\dots,a_m,bd_1,\dots,bd_t\rangle$

ولنثبت ان $J = K$ فيكون J منتهي التوليد وهذا خلف

$\forall i\in\{1,\dots,m\}: a_i\in J,\ \forall i\in\{1,\dots,t\}: b d_i\in J$

$\Rightarrow K\subseteq J$ $\in I$ لأن

بقي

$\forall x\in J\subseteq \langle J,b\rangle \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{m} s_i a_i + s b;\ a_i\in I, s_i, s\in R$ ★

$\Rightarrow s b = \underbrace{x}_{\in J} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} s_i a_i}_{\in J} \in J$

$\Rightarrow s\in (J:\langle b\rangle)$

$\Rightarrow s=\sum_{i=1}^{t} d_i v_i;\ v_i\in R$

نعوض في ★

$x=\sum_{i=1}^{m} s_i a_i + b\cdot\sum_{i=1}^{t} v_i d_i \in K$

عناصر من شكل K $\in K$ عناصر من شكل K أيضاً $\in K$

$\underline{b d_i \cdot v_i} \in K$

$I\subseteq K \Rightarrow I=K$ ومنه

ومنه المثالي I منتهي التوليد إذاً R نوثرية

تمرين: لتكن R حلقة تبديلية تحقق كل مثالي أولي في R مولد بعنصر جامد ($a=a^2$) عندئذ R نوثرية

الأخطاء المطبعية «Ahmad Abo Altot»

نعتذر عن وجود بعض الأخطاء والكمال لله

الملزمة 1 «الآن n حيث $n.q$» الصفحة 3 السطر 7

« 1 «$b=c$» الصفحة 4 السطر 12

« 3 «لنفرض أن $g(x)\neq 0$» السطر 2 من تحت الصفحة 3

« 6 «f غير قابل ... f غير قابل» الصفحة 2 السطر 13، 14

« 7 «$P \times a_n = b_s c_r$» الصفحة 2 السطر 15