نظري

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: الاستيفاء بكثيرات الحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

اليوم أعزاءنا الطلبة سوف نأخذ أول طريقة من طرق الاستيفاء بكثيرات الحدود وهي طريقة لاغرانج.

طريقة لاغرانج:

لتكن لدينا مجموعة من النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ ، $(n+1)$ نقطة متمايزة عندها تكون كثيرة حدود لاغرانج هي:

$$p_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \cdots + L_n(x)\, y_n$$

$l_i(x)$ معاملات لاغرانج $i = 0,1, \dots, n$ حيث $f(x_i) = y_i$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

البسط عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n

المقام عبارة عن عدد

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)} \quad , i \neq j$$

إثبات أن كثيرة الحدود هي وحيدة:

$$P_n(x_i) = f(x_i)\, , i = 0, \dots, n$$

$$L_0(x_0)y_0 + L_1(x_1)y_1 + \cdots + L_n(x_n), y_n = y_0 = f(x_0)$$

نعوض:

$$1y_0 + 0y_1 + \cdots + 0y_n = y_0$$

$$y_0 = y_0$$

وهي وحيدة

مثال: بفرض لدينا النقاط التالية أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة لاغرانج

x	$x_0 = -2$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
$f(x)$	4	2	8

الحل:

بدايةً سنقوم بإيجاد $p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} = \frac{x(x-2)}{8} = \frac{1}{8}x(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(0-(-2))(0-2)} = -\frac{(x+2)(x-2)}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)} = \frac{x(x+2)}{8}$$

وعليه فإنّ

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$p_2(x) = \frac{1}{8}x(x-2)(4) - \frac{1}{4}(x+2)(x-2)(2) + \frac{1}{8}x(x+2)(8)$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2) - \frac{1}{2}(x+2)(x-2) + x(x+2) \ldots\ldots\ldots..(*)$$

إذا طلب أوجد قيمة الدالة عند $x = 1$ لحساب $f(1)$ نحسب $p_2(1)$ حيث نعوض قيمة ال x في (*)

لأن $f(1) \approx p_2(1)$

$$p_2(1) = \frac{1}{2}(1)(1-2) - \frac{1}{2}(1+2)(1_2) + (1)(1+2) = 4$$

- **ملاحظات:**

١) إذا كانت إحدى قيم الدالة معدومة عندئذ لا نحسب معامل لاغرانج المقابل لها أي إذا كان $y_i = 0$ لا نحسب $L_i(x)$.

٢) الترتيب في اسماء النقاط أمر اختياري لكن يجب تثبيت التسمية من بداية الحل حتى نهايته

٣) يمنع منعا باتا إصلاح الشكل النهائي لكثيرة الحدود وفك الأقواس أثناء الحل.

٤) يفضل عدم فك الأقواس في كثيرة الحدود النهائية على أن يتم حساب الأمثال الثابتة المضروبة بهذه الأقواس بأبسط صورة ممكنة.

حساب E_{exact} (الخطأ الفعلي المرتكب في كثيرة حدود الاستيفاء)

$$E_{exact} = |T - Q|$$

من أجل إحدى النقاط المعطاة (المستخدمة في إيجاد كثيرة حدود الاستيفاء) عندها يكون E_{exact}

$$E_{exact} = |f(x_i) - p(x_i)| \,, \forall\, i = 0,1,\dots,n$$

أما من أجل أي نقطة مختلفة عن النقاط المعطاة فأن الخطأ الفعلي المرتكب:

$$E_{exact} = |f(x) - p_n(x)|$$

- إذا طلب منا حساب $Eexact$ للقيمة $p_2(3)$ نطبق القانون: $E_{exact} = |T - Q|$

حيث Q هي $p_2(3)$

T هي y_3 ولكن y_3 غير معلومة

لا يطلب

- أمّا إذ طلب عند أحد النّقاط المعطاة مثلاً عند النّقطة 2 ، $E_{exact} = |T - Q|$

Q هي $p_2(2)$

T هي $f(2) = y(2)$

نعوّض

دوماً $E_{exact} = |y(2) - p_2(2)| = 0$

ملاحظة: قيمة الدالة = قيمة الحدودية عند النقاط المعطاة

الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب قيمة الدالة من خلال حدودية استيفاء لاغرانج:

ليكن لدينا مجموعة من النقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ حيث يوجد لدينا $(n+1)$ نقطة مختلفة فإنّ الخطأ المرتكب في طريقة لاغرانج هو: $E_{max} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta)}^{(n+1)}$

حيث : لحساب p_{n+1} يوجد حالتين:

أ- إذا كانت النقاط متساوية البعد عن بعضها البعض نطبق: $max|p_{n+1}| \le \frac{h^{n+1}}{4} n!$

حيث $h = |x_i - x_{i-1}|$ أي الفرق بين نقطتين متتاليتين :

$\forall\, i = 1,2,\dots,n$

ب- إذا كانت النقاط غير متساوية البعد: (عندما يوجد لدينا نقطة نريد إيجاد الخطأ عندها):

نقوم بتعويض قيمة النقطة في القانون p_{n+1}

$$p_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

علماً أنّ هذا غير صحيح وسنتعلّم طريقة أصح في مقرر التّحليل العددي(2)

- $f^{(n+1)}(\theta)$ هي المشتق من الدرجة $n+1$ وَ θ هي القيمة التي يكون عندها المشتق أعظميّاً

ميزات طريقة لاغرانج:	عيوب طريقة لاغرانج:
١) لا تحتاج لأن تكون النقاط متساوية البعد عن بعضها البعض.	١) أن زيادة أو نقصان عدد النقاط يتطلب إعادة حساب جميع المعاملات L_i حيث $i = 0, \dots\dots, n$
٢) صيغة لاغرانج لحدودية الاستيفاء مفيدة جدا لأنها تتطلب منا حل جملة من المعادلات الخطية (حسب الطريقة العامة).	٢) إن درجة الحدودية التي تستوفي $(n+1)$ نقطة هي n (الأمر التي يعني هذه الطريقة ذات تكلفة حسابية عالية).
٣) توضح لنا صيغة لاغرانج بشكل صريح تأثير قيم الدالة f_i على حدودية الاستيفاء.	

مثال: ليكن لدينا جدول البيانات التالي:

x_k	$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}6$
$ln(x-1)$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}47$

أوجد حدودية لاغرانج الخطية التي تستوفي النقاط السابقة :

أوجد الخطأ النظري (الأعظمي) والخطأ الفعلي عند $x = 0{,}45$ إذا علمت أن : $f(x) = ln(x-1)$

(الحل):

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x - 0{,}6}{0 - 0{,}6} = -\frac{1}{0{,}6}(x - 0{,}6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x - 0}{0{,}6 - 0} = \frac{1}{0{,}6}(x)$$

$$p_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1$$

$$p_1(x) = -\frac{1}{0.6}(x - 0.6)(0) + \frac{1}{0.6}(x)(0.47)$$

$$p_1(x) = 0 + 0.7833333x = 0.7833333x$$

$$E_{exact} = |T - Q|$$

$$T = f(0{,}45) = \ln(0.45 - 1) = 0.3 > 15635564$$
$$Q = p(0.45) = 0.352503$$

$$E_{exact} = 0.01905564$$

الخطأ الأعظمي (النظري) E_{max}

$$f(x) = ln(x-1) \ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

f'' هي دالة متناقصة وبالتالي تبلغ قيمتها العظمى في بداية المجال $x = 0$

$$max|f''(x)| = 1$$

$$max\, p_{n+1}(x) \leq \frac{h^{n+1}}{4} n! = \frac{(0.6)^2}{4}$$

$$E_{max} = \frac{1}{2} \frac{(0.6)^2}{4} = 0.045$$

انتهت المحاضرة

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عيد

تنسيق: ولاء الأخضر♥