تقارب شبكة : لتكن $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة في فضاء تبولوجي (X, τ)
نقول إنها متقاربة من x إذا :

$$\forall v \in \vartheta_x : \exists \alpha_0 \in A \; ; \; \forall \alpha \geqslant \alpha_0 : x_\alpha \in V$$

مبرهنة : الشرط اللازم والكافي كي يكون (X, τ) فضاءً تبولوجياً T_2
هو أن تتقارب كل شبكة فيه من نهاية واحدة على الأكثر.
بصيغة أخرى:

$\boxed{1}$ $\forall x, y \in X : x \neq y \; , \exists \theta_x , \exists \theta_y \; ; \; \theta_x \cap \theta_y = \phi$

$\boxed{2}$ لكل شبكة نهاية واحدة على الأكثر.

من $1 \Longleftarrow 2$:

لتكن $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة ما ولنفرض أن

$$x_\alpha \longrightarrow x \quad , \quad x_\alpha \longrightarrow y$$

بما أن $x \neq y$ عندئذٍ :

$$\exists \theta_x , \exists \theta_y \; ; \; \boxed{\theta_x \cap \theta_y = \phi} \longrightarrow \boxed{1}$$

بما أن $x_\alpha \to x$ وبما أن θ_x جوار لـ x فتحة

$$\begin{cases} \alpha_1 \in A \; ; \; \alpha \geqslant \alpha_1 \Longrightarrow x_\alpha \in \theta_x \\ \alpha_2 \in A \; ; \; \alpha \geqslant \alpha_2 \Longrightarrow x_\alpha \in \theta_y \end{cases}$$

$$\exists \alpha_3 \in A \; , \; \begin{cases} \alpha_3 \geqslant \alpha_2 \\ \alpha_3 \geqslant \alpha_1 \end{cases}$$

إذا كان $\alpha \geqslant \alpha_3$ فإن $x_\alpha \in \theta_x$ و $x_\alpha \in \theta_y$

إذاً: $x_\alpha \in \theta_x \cap \theta_y = \phi$

وهذا تناقض ومنه لكل شبكة نهاية واحدة على الأكثر.

مثال: ليكن $X = \mathbb{R}$ و $f = \{A \subseteq \mathbb{R} ;$ منتهية $A^c\}$

f مرشحة لأن:

$\phi \neq f$: $\phi \notin f$

$X \in f$

$A, B \in f \Rightarrow A \cap B \in f$

محققة بالنسبة للتقاطع $\Leftarrow$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

محققة $\Leftarrow$ $A \in f$, $A \subseteq B \Rightarrow B \in f$

وهي مرشحة المتممات المنتهية

- في حال $X = \mathbb{N}$ فإنها تدعى مرشحة فريشيه (Fréchet)

ملاحظة: $A \cap B = \phi \Rightarrow A \subseteq B^c$

$\boxed{\text{سؤال امتحاني}}$: عرف تقارب شبكة ثم أثبت أن لكل مرشحة نهاية واحدة على الأكثر

مبرهنة هام:

لكل مرشحة نهاية واحدة على الأكثر.

البرهان:

لنفرض مؤقتاً أن f مرشحة لها نهايتان مختلفتان x, y و $x \neq y$

$$f \longrightarrow x \quad ; \quad \begin{cases} \mathcal{V}_x \subseteq f \\ \mathcal{V}_y \subseteq f \end{cases}$$
$$f \longrightarrow y$$

$$\begin{cases} \exists\, \theta_x \\ \exists\, \theta_y \end{cases} ; \quad \theta_x \cap \theta_y = \phi$$

$$\theta_x \in f \;,\; \theta_y \in f \implies \theta_x \cap \theta_y \in f$$

$$\implies \phi \in f$$ وهذا تناقض

والفرض المؤقت خاطئ

ملاحظات

1 تقاطع مرشحتين مرشحة

هامة 2 اجتماع مرشحتين ليست مرشحة «لاثبات ذلك»

بالمثال المعاكس : $X = \mathbb{R}$

$$f_1 = \{A : 10 \in A \subseteq \mathbb{R}\}$$

$$f_2 = \{B : 20 \in B \subseteq \mathbb{R}\}$$

$$D_1 =]9, 11[\in f_1$$

$$D_2 =]19, 21[\in f_2$$

لدينا :

$$f_1 \cup f_2 = \{D : D \in f_1 \vee D \in f_2\}$$

$$\implies D_1 \cap D_2 = \phi \notin f_1 \cup f_2$$

المرشحة الأعظمية : أي مرشحة تحويها تساويها .

مبرهنة : في فضاء متراص كل مرشحة أعظمية تكون متقاربة

تعريف : قاعدة مرشحة : لتكن X مجموعة ما و B جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية غير الخالية من X يقال عن B إنها قاعدة لمرشحة على X

إذا تحقق :

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{B} : \exists A_0 \in \mathcal{B} \; ; \; A_0 \subseteq A_1 \cap A_2$$

مثال ① : إذا كان $X = \mathbb{R}$

و $\mathcal{B} = \{]-\varepsilon, \varepsilon[\;, \varepsilon > 0 \}$

عندئذٍ هي أساس مرشحة (قاعدة مرشحة).

مثال ② :

$\mathcal{B} = \{ N(x, \varepsilon) \,, \varepsilon > 0 \}$ و (X, τ)

هي قاعدة مرشحة .

مثال ③ : $X = \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{B} = [\{ n, n+1, \ldots \} \, n \geq 1]$$

① $\phi \notin \mathcal{B}$

② $\mathcal{B} \neq \phi$

لأن $\mathbb{N}^* \in \mathcal{B}$

③ $A, B \in \mathcal{B}$ عندئذٍ :

$A = \{ n_1, n_1 + 1, \ldots \}$

$B = \{ n_2, n_2 + 1, \ldots \}$

نفرض أن $n_3 \geq \max\{n_1, n_2\}$

عندئذٍ : $C = \{ n_3, n_3 + 1, \ldots \} \subseteq A \cap B$

أي إذا كان

③ $A = \{ 7, 8, 9, \ldots \}$

$B = \{ 3, 4, 7, 8, 9 \ldots \}$

أن B تحوي A ولكن

$B \notin \mathcal{B}$

إذا $\mathcal{B}$ ليست لمرشحة على X

حالة 1 : $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$

$$x + y = \beta_1 + \beta_2 = 2^{\alpha_3} \beta$$

حيث $\alpha_3 > 0$ و β فردي

$$\left.\begin{array}{l} |x+y|_2 = 2^{-\alpha_3} \\ |x|_2 = 2^{-0} = 1 \\ |y|_2 = 2^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow |x+y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\}$$

باقي الحالات برهانها وظيفة

END

إعداد

رشا رويعي

نذير تيناري