◄ دكتور المادة: نايف طلي

◄ المحاضرة: السادسة ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في هذه المحاضرة :

سنقوم بتتمة ما أخذناه في المتتاليات

المتتاليات

تعريف: تقارب متتالية :

نقول عن المتتالية $\{a_n\}n \in N$ بأنها متقاربة من $a \in R$ اذا تحقق: $\lim_{a\to n} a_n = a$

تطبيق على الأمثلة السابقة

متباعدة $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

متباعدة $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$

متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

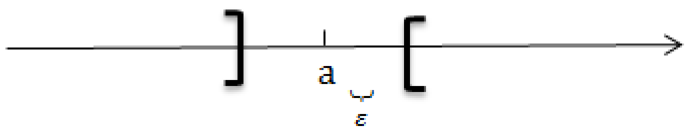
متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0$ (نأخذ الحد العام بالقيمة المطلقة، إذا كان موجب أو سالب عندما $n \to \infty$ فإنه يسعى للصفر)

متباعدة $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

متباعدة غير معين $= \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ (إذا كان n عدد زوجي يكون الجواب 1 وإذا كان n عدد فردي يكون الجواب -1)

اي: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \begin{cases} -1 & n \text{ فردي} \\ 1 & n \text{ زوجي} \end{cases}$

المفهوم الهندسي لتقارب:



نقول عن المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متقاربة من a إذا كانت من أجل أي جوار لـ a (أي مجال مفتوح يحتوي الصفر) فإن هذا الجوار(المجال) يحتوي على جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد محدود منها.

التعريف الجبري:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \,;\, \forall\, n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

خواص المتتالية:

١-اذا كانت المتتالية متقاربة فأن نهايتها وحيدة.

٢- اذا كانت المتتالية متقاربة فهي محدودة ولكن العكس ليس بالضرورة .

٣- إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a وكانت المتتالية $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من b فإن:

$\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a + b$

$\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a - b$

$\{a_n . b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $a . b$

إذا كانت $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a فإن المتتالية $\{ka_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من Ka

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k.a$$

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{a}{b}$ حيث $b_n \neq 0$ و $b \neq 0$

٤- إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a و $a_n \geq 0$ فإن: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

٥- لتكن $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان متقاربتان بحيث $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ و $a_n \leq b_n$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

أهم النهايات الشهيرة:

١-

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{متقاربة} & |a|<1 \\ 1 & \text{متقاربة} & a=1 \\ 1 \quad (n\text{زوجي}) & \text{متباعدة} & a=-1 \\ -1 \quad (n\text{فردي}) & & \\ +\infty \quad a>1 & \text{متباعدة} & |a|>1 \\ \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} & & a<-1 \end{cases}$$

٢- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ; \quad p>0$

٣- $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad ; \quad a>0$

٤-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad ; \quad a\in\mathbb{R}$$

٥- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

٦-

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

٧-

$$\lim_{n\to+\infty} n.a^n = 0 \quad ; \quad |a|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

١٠-

$$\lim_{n\to\infty} \tan\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

تتمات في المتتاليات:

المتتاليات اللامتناهية في الكبر :نقول عن المتتالية$\{a_n\}$ انها لا متناهية في الكبر اذا تحقق :

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

$$\{(-1)^n n\}\ ,\{-n\},\{n\}$$

اذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فإنها متقاربة.

$$\left\{\frac{(n)}{n+1}\right\} = \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots\dots\dots\dots$$

$$\left\{\frac{(n+1)}{n}\right\} = 2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\dots\dots\dots\dots\dots\dots.,1$$

٦- اذا كانت المتتالية $\{b_n\}$متقاربة فان $\{a_n\}$متقاربة .

٧-اذا كانت المتتالية $\{a_n\}$متباعدة فان المتتالية $\{b_n\}$متباعدة.

٨- إذا كان لدينا ثلاث متتاليات $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ، $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ وكان $a_n \le c_n \le b_n$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

أي ان المتتالية $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من l.

هناك ثلاثة أنماط للمتتاليات: سردي مثل : $\frac{1}{n}$ فروع مثل:$\{(-1)^n\}$ مثل المتراكبة.

٩-اذا كانت المتتالية مطردة ومحدودة فإنها متقاربة.

١٠- اذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الاعلى فإنها متقاربه.

١١-إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n \quad ; \quad a_n > 0$$

١٢- إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

المتتاليات الغير متناهية من الصغر:

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$انها لا متناهية في الصغر

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

مبرهنة: اذا كانت $\{\alpha_n\}$محدودة   و$\{a_n\}$ لا متناهية في الصغر فان

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n * a_n = 0$$

ملاحظات:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n \quad ; \quad a_n > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \sin \lim_{n\to\infty} a_n$$

ملاحظة: اذا حذف او اضافة عدد منته من الحدود الى عناصر المتتالية لا يؤثر على تقارب او تباعد المتتالية.

تمرين : أثبت أن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$متقاربة من الصفر من تعريف التقارب بلغة $\{\varepsilon, N\}$.

الحل:

تكون المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$متقاربة من الصفر اذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_{\varepsilon} : \forall n > N_{\varepsilon} \to \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

اذا نجعل

$$:\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \to \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

نختار : $N_{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}$ للتأكد من صحة المتراجحة:N_{ε}نعوض في التعريف.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} : \forall n > N_{\varepsilon} \to \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_{\varepsilon}} \leq \varepsilon$$

اذا:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

انتهت المحاضرة

إعداد : سارة شهاب *مؤمنة أندورة *عاتكة فيحان

تنسيق : محمد أنس القزاز