المحاضرة الرابعة

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

◄ عنوان المحاضرة: طريقة السيمبلكس لحل البرامج الخطية

نظري ☑
عملي ☐

## طريقة السيمبلكس لحل البرامج الخطية:

الطريقة البيانية وغالبا ما يكون عدد المتحولات والعمليات كبير طريقة السيمبلكس تحل لنا البرنامج مهما كان عدد المتحولات وعدد الشروط

## خطوات طريقة السيمبلكس

1) نجعل الطرف الثاني في جميع شروط المسألة قيم موجبة او مساوية للصفر
2) تحويل الشكل العام الى الشكل القياسي
3) اذا كانت شروط المسألة في الأصل (قبل المرحلة 2) تساوي أو متراجحة من النوع أكبر او يساوي نضيف متحولات اصطناعية، لهذه المتحولات موجبة وتضاف لهذه المتحولات الى دالة الهدف بعد ضربها بعدد كبير موجب M
4) اذا اضيفت متحولات اصطناعية نقوم بحذف صف سطر دالة الهدف وذلك بضرب الشرط المقابل بـ M- واضافته الى دالة الهدف.

نقوم بكتابة الجدول الابتدائي لطريقة سيمبلكس نضع شروط المسألة كما هي في الجدول، نضرب سطر دالة الهدف بـ (-1) ونضعه في الجدول السابق

★ بعد كتابة الجدول الابتدائي نقوم بالخطوات التالية:

1) تحديد عمود الدوران: هو العمود المقابل لأكبر قيمة موجبة لدالة الهدف.
2) تحديد سطر الدوران: هو السطر المقابل لأصغر قيمة موجبة التي تجعل ناتج قسمة الطرف الثاني على امثال عمود الدوران (ماعدا عناصر سطر دالة الهدف)



Scanned by CamScanner

4) عنصر الدوران: هو العنصر الناتج عن تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران

5) تحويل عنصر الدوران الى واحد (وذلك بتقسيم سطر الدوران على قيمة عنصر الدوران)

وجعل جميع عناصر عمود الدوران مساوية للصفر بما فيها سطر دالة الهدف (( بإجراء تحويلات سطرية )). هذه التحويلات هي جذب سطر الدوران بعد ضرب وجمع الأسطر مع سطر الدوران.

6) تحويل المتحولات الأساسية (( وهي المتحولات التي جميع عناصر عمودها تساوي الصفر ماعدا عنصر واحد يساوي الواحد )).

7) حذف المتحولات الاصطناعية من جدول السيمبلكس اذا كانت متحولات غير أساسية

8) اذا كانت جميع عناصر سطر دالة الهدف سالبة أو صفرية عندها نتوقف والحل هو الحل الأمثل والانتقال للخطوة الأولى.

تمرين

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f = 100x_1 + 80x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & 6x_1 + 9x_2 \le 36 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

الخطوة الأولى: محققة (( جميع قيم الطرف الثاني موجبة ))

الخطوة الثانية: نحولها للشكل القياسي

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -100x_1 - 80x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 + S_1 = 6 \\ & 6x_1 + 9x_2 + S_2 = 36 \\ & x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Scanned by CamScanner

## الجدول الابتدائي :

| المتحولات الأساسية | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 1 | (1) | 0 | 6 |
| $S_2$ | 6 | 9 | 0 | (1) | 36 |
| سطر دالة الهدف | 100 | 80 | 0 | 0 | 0 |

ملاحظات :

- اشتال سطر دالة الهدف يضرب بـ (-1) ونوضع في الجدول الابتدائي.
- قيمة دالة الهدف في الجدول الابتدائي "في بداية الحل" هي 0
- نبحث عن متحولات عناصر عمودها أصفار عدا عنصر محوري "1"
ونكتب هذا المتحول بسطر الموجود فيه رقم "1" تحت المتحولات الأساسية
- كل جدول عدا جداول السيمبلكس يعطينا حل وليس بالضرورة الحل الأمثل
- الجدول النهائي يعطينا الحل الأمثل إذا كانت جميع عناصر سطر دالة الهدف سالبة أو أصفار
- الجدول النهائي يعطينا الحل الأمثل.

الحل :

نأخذ القيم المقابلة لها بالطرف الثاني

متحولات أساسية $\begin{cases} S_1 = 6 \\ S_2 = 36 \end{cases}$

نأخذ القيمة 0 دائماً للمتحولات غير الأساسية

متحولات غير الأساسية $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل هي $F = 0$



Scanned by CamScanner

3 عنصر الدوران: ناتج عن تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران

| متحولات أساسية | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | الطرف الثاني | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 6 | ← 2 سطر الدوران $\frac{6}{2}=3$ |
| $S_2$ | 6 | 0 | 0 | 1 | 36 | $\frac{36}{6}=6$ } $\text{Min}\{3,6\}=3$ |
| سطر دالة الهدف | 100 | 80 | 0 | 0 | 0 | القيمة المقابلة في عمود الدوران |

1 عمود الدوران

((العمود المقابل لأكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف))

الآن نحول عنصر الدوران (2) الى واحد وذلك بتقسيم سطر الدوران على 2

ثم نجعل جميع عناصر عمود الدوران تساوي الصفر وذلك بإجراء التحويلات السطرية التالية

$$R_1' \Rightarrow \frac{1}{2} R_1$$

$$R_2' \rightarrow R_2 - 6R_1'$$

$$R_3' \rightarrow R - 100R_1'$$

ونصبح لدينا الجدول:

| متحولات أساسية | $x_1$ | $x_2$ | $S_1$ | $S_2$ | الطرف الثاني | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 3 | $\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$ } $\text{Min}\{6,3\}=3$ |
| $S_2$ | 0 | 6 | -3 | 1 | 18 | ← $\frac{18}{6}=3$ 2 سطر الدوران |
| سطر دالة الهدف | 0 | 30 | -50 | 0 | -300 | |

عنصر الدوران — 1 عمود الدوران

نقوم بتغيير المتحولات الأساسية (أي كل متحولات عناصر عمودها عدا عنصر يكون 1 واكتب هذا المتحول في السطر الموجود فيه رقم 1)

قيمة دالة الهدف $F_{\max} = -300$ ، المتحولات غير الأساسية $\begin{cases} x_1 = 0 \\ S_1 = 0 \end{cases}$ ، المتحولات الأساسية $\begin{cases} x_1 = 3 \\ S_2 = 18 \end{cases}$

هذا الحل ليس الحل الأمثل لأن سطر دالة الهدف ليست جميعها سالبة أو صفرية



Scanned by CamScanner

نحول عنصر الدوران الى واحد وباقي عناصر عمود الدوران أصفار
نجري التحويلات السطرية التالية:

$$R_2' \longrightarrow \frac{1}{6} R_2$$
$$R_1' \longrightarrow R_1 - \frac{1}{2} R_2'$$
$$R_3' \longrightarrow R_3 - 30 R_2'$$

| متحولات أساسية | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | طرف ثاني |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | $3/4$ | $-1/2$ | 1.5 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $-1/2$ | $1/6$ | 3 |
| سطر دالة الهدف | 0 | 0 | -35 | -5 | -390 |

كل عنصر بدالة الهدف غير موجبة فالحل هو الحل الأمثل.

الحل الأمثل هو

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 3$ بحيث قيمة دالة الهدف للشكل القياسي هي $Z = -390$

$s_1 = s_2 = 0$

للتأكد من صحة الحل نحو ذلك في البرنامج الشكل القياسي ونتحقق

---

**تمرين** ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\text{Min } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{S.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حتى الشكل نلاحظ ان الشرط (2) و (3) قبل التحويل الى الشكل القياسي هي حتى الشكل "المساواة"، "أكبر أو يساوي" لذلك نقوم بإضافة متحولات اصطناعية لهذه الشروط



Scanned by CamScanner

$$\text{Min } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.t: } x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

وهو لشكل المتباينة قبل اضافة المتحولات الاصطناعية. باضافة المتحولات الاصطناعية $a_2$ نضيفها للشرط "2"، $a_3$ نضيفها للشرط "3"

$$\text{Min } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.t: } x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + a_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_2, a_3 \geq 0$$

ملاحظة: هذه المسألة لا تكافئ المسألة الأساسية لذلك نقوم بضرب المتحولات الاصطناعية بعدد كبير كفاية وليكن $M$ ونجمع لدالة الهدف

$$\text{Min } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + Ma_2 + Ma_3$$

$$\text{s.t: } x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + a_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_2, a_3 \geq 0$$

وهي المسألة المكافئة للمسألة الأساسية.

نتخلص من $a_2$ و $a_3$ من دالة الهدف وذلك بضرب الشرط "2" و"3" بـ $-M$ ونجمعه مع دالة الهدف (( نقل المعادلة الى طرف بالأول لتصبح $g(x)=0$ ))

$$\text{Min } 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + Ma_2 + Ma_3 - M(2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 - 60)$$

$$- M(x_1 - x_2 + 2x_3 + a_3 - 20)$$



Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow f = -(3M-2)x_1 - 3x_2 - (5M+4)x_3 + Ms_2 + 80M$$

يصبح الجدول الابتدائي :

| المتحولات الأساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30 $\frac{30}{1}$ |
| $a_2$ | 2 | 1 | 3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 60 $\frac{60}{3}$ |
| $a_3$ | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 $\frac{20}{2}$ |
| سطر دالة الهدف | $3M-2$ | $+3$ | $5M+4$ | 0 | $-M$ | 0 | 0 | $+80M$ |

عنصر الدوران ← عمود الدوران

$\text{Min}\{30, 20, 10\} = 10$ ← سطر الدوران

نقوم بتحويلات سطرية بجعل عنصر الدوران يساوي الـ 1 وجميع عناصر العمود صفر

$$R_3' \longrightarrow \frac{1}{2} R_3$$
$$R_1' \longrightarrow R_1 - R_3'$$
$$R_2' \longrightarrow R_2 - 3R_3'$$
$$R_4' \longrightarrow R_4 - (5M+4) R_3'$$

يصبح الجدول :

عنصر الدوران

| المتحولات الأساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | طرف ثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 20 |
| $a_2$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | -1 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 30 ← سطر الدوران |
| $x_3$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 10 |
| سطر دالة الهدف | $\frac{1}{2}M-4$ | $\frac{5}{2}M+5$ | 0 | 0 | $-M$ | 0 | $-\frac{5}{2}M-2$ | $30M-40$ |

عمود الدوران

نقوم بحذف $a_3$ مع عموده كونه أصبح متحول غير أساسي .



Scanned by CamScanner

بتكرار الخطوات: نقوم بالتحويلات السطرية الآتية

$$R_2' \longrightarrow \frac{2}{5} R_2$$
$$R_1' \longrightarrow R_1 - \frac{3}{2} R_2'$$
$$R_3' \longrightarrow R_3 + \frac{1}{2} R_2'$$
$$R_4' \longrightarrow R_4 - (\frac{5}{2}M + 5) R_2'$$

عنصر الدوران

| المتحولات الأساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $a_2'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | 2 ← عنصر الدوران |
| $x_2$ | $\frac{1}{5}$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 12 |
| $x_3$ | $\frac{3}{5}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 16 |
| سطر دالة الهدف | $-5$ | 0 | 0 | 0 | 2 | $-\frac{7}{2}M - 4$ | $-100$ |

↑ عمود الدوران

بما أن:

$a_2$ معتول عن أساسي فنحذفه من جدول السيمبلكس

* نقوم بالتحويلات التالية:

$$R_1' \longrightarrow \frac{5}{3} R_1$$
$$R_2' \longrightarrow R_2 + \frac{2}{5} R_1'$$
$$R_3' \longrightarrow R_3 + \frac{1}{5} R_1'$$
$$R_4' \longrightarrow R_4 - 2 R_1'$$

| المتحولات الأساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 1 | $\frac{10}{3} = 3,3$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{40}{3} = 13,3$ |
| $x_3$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{50}{3} = 16,7$ |
| سطر دالة الهدف | $-\frac{17}{3}$ | 0 | 0 | $-\frac{10}{3}$ | 0 | $-\frac{320}{3} = 106,7$ |



Scanned by CamScanner

سطر دالة الهدف إما أصفار أو أعداد سالبة وبالتالي فإن الحل الذي هو الحل الأمثل :

$S_2 = 3,3$

$x_2 = 13,3$ ؛ $S_1 = x_1 = 0$

$x_3 = 16,7$

وقيمة دالة الهدف $F = -106,7$ في الشكل القياسي والأساسي

كون الشكل الأساسي هو Min

انتهت المحاضرة



Scanned by CamScanner