نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-المعادلة التامة والشرط اللازم والكافي لكي تكون تامة.

٢-كيفية ايجاد الحل العام للمعادلة التامة بالطريقة العامة.

المعادلات التفاضلية التامة

نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \ldots (1)$$

حيث أنَّ $M(x,y)$ و $N(x,y)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على منطقة ما ولتكن G؛ إنّها تامة إذا وجد تابع $F(x,y)$ معرف ومستمر على G بحيث يكون:

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أنَّ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

والتفاضل العام الكلي:

$$\Rightarrow \boldsymbol{dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy}$$

بما أنَّ الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ قابلتان للمفاضلة ، نأخذ المشتق الجزئي الثاني لهما:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وبالمقارنة طرفاً إلى طرف نجد:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

وهو الشرط اللازم لكي تكون المعادلة التفاضلية (1) تامة.

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو: $F(x,y)=c$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x^2.dx+y^2.dy=0}$$

الحل:

لو ضربنا المعادلة ب **3** نجد:

$$\boldsymbol{3x^2dx+3y^2dy=0}$$

وبالملاحظة نجد انها تكافئ: $\boldsymbol{d(x^3+y^3)=0}$

$$\xrightarrow[\text{بالمكاملة}]{} \boldsymbol{F(x,y)=x^3+y^3=c}$$

$$\boldsymbol{x.dy+y.dx=0}$$

الحل:

$$\begin{cases} M(x,y)=x \Rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0 \\ N(x,y)=y \Rightarrow \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية المدروسة تامة.

$$d(x.y)=0$$

بالمكاملة نجد:

$$x.y=c \Rightarrow \boxed{y=\frac{c}{x}}$$

ملاحظة: في كثير من الاحيان لا يمكننا ملاحظة فيما اذ كان الطرف الاول من المعادلة يشكل تفاضل تام لتابع مثلا $f(x,y)$ ام لا ولذلك سندرس طريقة عامة للحل العام

ايجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية بالطريقة العامة:

وجدنا في المعادلة التفاضلية التامة تكون:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}}$$

و الحل العام لها هو من الشكل:

$$f(x,y) = c$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة بالطريقة العامة:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

حيث أن $\varphi(y)$ دالة تابعة ل y فقط فنوجدها حتى يتحقق الشرط المطلوب:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y).dx}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

وبما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$[N(x,y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \Rightarrow N(x_0,y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y).dy + c_1$$

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y).dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y).dy}$$

حيث أن (x_0 , y_0) نقطة اختيارية بشرط أن تنتمي إلى ساحة تعريف الدالتين

$$M(x,y), N(x,y)$$

بطريقة مشابهة(حيث يمكن أن نأخذ الدالة الأسهل للتكامل):

$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x,y)dx+\varphi(x)$$

حيث $v(x)$ دالة تابعة ل x فقط

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.dy+\ \varphi'(x)=M(x,y)$$

و بما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.dy+\varphi'(x)=M(x,y)$$

$$[M(x,y)]_{y_0}^{y}+\varphi'(y)=M(x,y)$$

$$M(x,y)-M(x_0,y)+\varphi'(y)=M(x,y)\ \Rightarrow\ M(x_0,y)=\varphi'(x)$$

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}M(x_0,y).dx+c_1$$

ومنه

$$\boxed{F(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y).dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y).dy}$$

و هو الحل العام.

امثلة:

$$(3x^2+6xy^2).dx+(6x^2y+4y^3).dy=0$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy \\ N(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$ لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$ ، لنأخذ:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,.\,dx + \varphi(y)$$

$$= \int (3x^2 + 6xy^2)\,.\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \xRightarrow{\text{تكامل}} \varphi(y) = y^4 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$$

وهو الحل العام.

$$\frac{1}{x}\,.\,dy - \frac{y}{x^2}\,.\,dx = 0$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\ N(x,y) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذاً المعادلة تامة. والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$ لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$ ، لنأخذ:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)=\int -\frac{y}{x^2}.dx+\varphi(y)=\frac{y}{x}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=\frac{1}{x}\Rightarrow \varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y)=\frac{y}{x}=C}$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$(3ye^{3x}-2x)dx+e^{3x}\,dy=0$$

الحل:

$$M(x,y)=3ye^{3x}-2x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=3e^{3x}$$

$$N(x,y)=e^{3x} \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=3e^{3x}$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية تامة و لنوجد الآن الحل العام:

$$f(x,y)=\int N(x,y).dy+\varphi(x)$$

$$=\int e^{3x}dy+\varphi(x) \;=y.e^{3x}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3ye^{3x}+\varphi'(x)=3ye^{3x}-2x$$

$$\varphi'(x)=-2x \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(x)=-x^2$$

و منه فإنّ الحل العام يكون:

$$f(x,y)=ye^{3x}-x^2=c$$

حل تمارين الوظيفة:

$$(x+y+2)dx+(x-y^2+3)dy=0$$

الحل:

$$M(x,y)=x+y+1 \qquad \& \qquad N(x,y)=x-y^2+3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \quad \Rightarrow$$ ومنه المعادلة تامة

حلها العام $F(x,y) = c$ وبالتالي $F(x,y) = \int M(x,y)dx + \vartheta(y)$

$$\Rightarrow F(x,y) = \int (x + y + 1)dx + \vartheta(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + \vartheta(y) \dots (*)$$

نشتق بالنسبة لـy : $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x + \vartheta'(y)$

نطابق مع $N(x,y)$:

$$x - y^2 + 3 = x + \vartheta'(y) \Rightarrow \vartheta'(y) = -y^2 + 3$$

$$\Rightarrow \vartheta(y) = \int \vartheta'(y)dy = \int (-y^2 + 3)dy = \frac{-y^3}{3} + 3y + c_0$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_0 = c$$

٢- $(4x - 3y - y.\sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy = 0$

الحل:

$$M(x,y) = 4x - 3y - y\sin x \qquad \& \quad N(x,y) = (\cos x - 3x - \sin y)$$

المعادلة تامة وبالتالي: $F(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x)$

$$= \int (\cos x - 3x - \sin y)dy + \psi(x)$$

$$F(x,y) = y.\cos x - 3xy + \cos y + \psi(x) \dots (*)$$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -y\sin x - 3y + \psi'(x)$$

نطابق مع $M(x,y)$:

- $y\sin x - 3y + \psi'(x) = 4x - 3y - y\sin x \Rightarrow \psi' = 4 \;\; \psi(x) = \int \psi'(x)dx = \int 4xdx = 2x^2 + c_0$ نعوض في $(*)$ نجد:

$$F(x,y) = y\cos x - 3xy + 2x^2 + c_0 = c$$

$$(2x+3y+4)dx + (3x+4y+5)dy = 0$$ -٣

الحل:

$$M(x,y) = 2x+3y+4 \quad \& \quad N(x,y) = 3x+4y+5$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

فالمعادلة تامة وحلها العام: $F(x,y) = c$

وبالتالي: $F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$

$$F(x,y) = x^2 + 3yx + 4x + \varphi(x) \ldots (*)$$

نشتق بالنسبة لـy : $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x + \varphi'(y)$

نطابق مع $N(x,y)$: $3x+4y+5 = 3x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 4y+5$

$$\Rightarrow \varphi(y) = 2y^2 + 5y + c_0$$

نعوض في $(*)$

$$F(x,y) = x^2 + 3yx + 4x + 2y^2 + 5y + c_0 = c$$

فيكون الحل العام: $x^2 + 3yx + 4x + 2y^2 + 5y = c_1 \;\; ; \; c_1 = c - c_0$

ملاحظة: عندما تكون المعادلة تامة ولايجاد الحل العام لها يمكن ان نختار:

اما: $F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$

أو: $F(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x)$

والمعادلتان ستعطيان نفس الإجابة☺

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد☺علا الدالاتي //تنسيق: ولاء الأخضر