سندرس في هذه المحاضرة أهم التبولوجيات على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وسندرس تعريف قاعدة التبولوجيا، بالإضافة لمعلومات جانبية مفيدة.

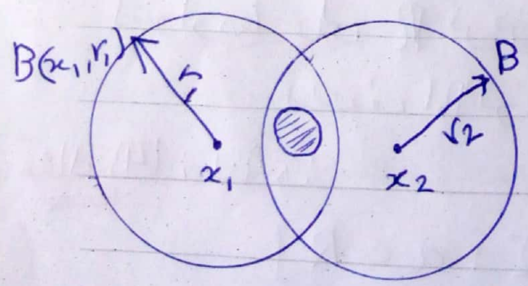
قاعدة التبولوجيا: لتكن $X \neq \phi$ و B جماعة من أجزاء X، عندئذ نقول إن B قاعدة لتبولوجيا على X إذا كان تقاطع أي عنصرين من B يحوي عنصراً منها، أي:

$$\underbrace{B \subseteq P(X)}_{\text{أجزاء } X} \; ; \; B \text{ قاعدة لتبولوجيا} \iff$$

$$\{\forall \theta_1, \theta_2 \in B \; ; \; \exists \theta_0 \in B : \; \theta_0 \subseteq \theta_1 \cap \theta_2\}$$

«ليس بالضرورة أن يكون تقاطع عنصرين من B يساوي عنصراً من B»

مثال 1: ليكن (X, d) فضاءً مترياً و B مجموعة لكل الكرات المفتوحة في X (وفق المترك d)، إن B قاعدة لتبولوجيا على X وذلك لأن تقاطع أي عنصرين (كرتين) منها سيحوي عنصراً منها (كرة مفتوحة) كما موضح بالرسم:



- نلاحظ من الرسم أن التقاطع سيحوي كرة مفتوحة (عنصر من B).

- نقول عن τ إنها تبولوجيا على X مولدة من القاعدة B
إذا كان كل عنصر من τ يكتب على شكل اتحاد عناصر من B
((المجموعة المفتوحة هي اتحاد لعناصر من القاعدة))

- في مثال سابق :
إن التبولوجيا المولده من صف الكرات المفتوحة هي جماعة كل المجموعات التي تكتب على اتحاد كرات مفتوحة وهذا يتسق مع ما نعرفه في الفضاءات المترية أن كل مجموعة مفتوحة ((عنصر من τ يكتب على شكل اتحاد كرات مفتوحة

- مثال $\boxed{2}$: لنأخذ $X=\mathbb{R}$ و $B=\{]a,b[: a,b\in\mathbb{R}\}$ ($a\leq b$)

إن B قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}$ ذلك لأن تقاطع أي عنصرين منها (أي مجالين مفتوحين) يحوي عنصراً منها .
وإن التبولوجيا المولدة من B هي جماعة كل المجموعات التي تكتب على شكل مجال مفتوح أو اجتماع لمجالات مفتوحة وهي التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

مثال : إن المجموعة $A=]-3,3[\cup]7,15[$ هي مجموعة مفتوحة في التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ لأنها كتبت على شكل اجتماع لمجالات مفتوحة سنرمز للتبولوجيا المألوفة المولدة من القاعدة B السابقة

$$\tau_1=\tau_{]a,b[}$$

مثال $\boxed{3}$: بمثل المناقشة السابقة نجد أن $\mathbb{B}=\{]a,b] , a,b\in\mathbb{R}\}$ ($a<b$) قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}$ نرمز لها بـ $\tau_{]a,b]}$ تدعى التبولوجيا نصف المألوفة على $\mathbb{R}$

مثال $\boxed{4}$: لنأخذ

$\mathbb{B}=\{[a,\infty[: a\in\mathbb{R}\}$ وأخذنا المجموعات

وأخذنا المجموعات $A_n = [\frac{1}{n}, \infty[$ حيث $n \geq 1$ عدد طبيعي

نلاحظ أن $A_n \in B, \forall n \geq 1$ إلا أن

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} [\frac{1}{n}, \infty[=]0, \infty[\notin B$$

بالتالي B غير مغلقة للاجتماع $\Leftarrow$ B لا تشكل تبولوجيا على $\mathbb{R}$

لكنها تشكل قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}$ ونرمز لها بـ $\tau_{[a,\infty[}$

أما لو أخذنا $B = \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}$

سنجد أنها تشكل تبولوجيا على $\mathbb{R}$ ((تحقق من ذلك))

- بناءً على ما سبق سنذكر الآن تبولوجيات شهيرة على $\mathbb{R}$ موضحين بالرموز صف المجالات المولدة منها:

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $]a,b[$: $\tau_1 = \tau_{]a,b[}$

أي $B = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}\}$ ((التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$))

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $]a,b]$: $\tau_2 = \tau_{]a,b]}$

أي $B = \{]a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ ((التبولوجيا بصف الألوفة على $\mathbb{R}$))

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $[a,b[$: $\tau_3 = \tau_{[a,b[}$

أي $B = \{[a,b[: a,b \in \mathbb{R}\}$

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات $[a,\infty[$ أي: $\tau_4 = \tau_{[a,\infty[}$

$B = \{[a,\infty[: a \in \mathbb{R}\}$

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $]a,\infty[$ أي: $\tau_5 = \tau_{]a,\infty[}$

$B = \{]a,\infty[, a \in \mathbb{R}\}$

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $]-\infty, a]$ أي: $\tau_6 = \tau_{]-\infty,a]}$

$B = \{]-\infty, a] ; a \in \mathbb{R}\}$

- التبولوجيا المولدة بصف المجالات من الشكل $]-\infty, a[$ أي: $\tau_7 = \tau_{]-\infty,a[}$

$B = \{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}$

$\tau_8 = \tau_{[a,b]} = P(\mathbb{R})$ أجزاء $\mathbb{R}$

$\tau_9 = \tau_{]-\infty,+\infty[}$

وإليكم أيضاً أمثلة أخرى :

1 $\tau_* = \{A \subseteq R : x \in R\} \cup \{\phi\}$ حيث $x \in \mathbb{R}$ ، إن τ_* تبولوجيا على $\mathbb{R}$ لأن :

1) $\phi \in \tau_*$ وضوحاً

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau_* \Longrightarrow X = \mathbb{R} \in \tau_*$

2) $\forall A, B \in \tau$; $x \in A$, $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B \in \tau_*$

3) $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau_* \Rightarrow x \in A_i$, $\forall i \in I$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_*$

$\Leftarrow \tau_*$ تبولوجيا على $\mathbb{R}$ ندعوها **تبولوجيا النقطة المختارة**

2 $\tau_{**} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \phi \overset{\text{رمز "أو"}}{\vee} A = \mathbb{R} \vee x \notin A\}$

3 تبولوجيا $\tau_{cf} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \phi \vee A^c$ منتهية$\}$
المتممات المنتهية (تبولوجيا زاريسكي) ، تبولوجيا لأن :

1) $\phi \in \tau_{cf}$ وضوحاً ، $\mathbb{R}^c = \phi$ منتهية $\Rightarrow \mathbb{R} \in \tau_{cf}$

2) $\forall A, B \in \tau_{cf}$; A^c منتهية , B^c منتهية

$\Rightarrow (A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ منتهية لأنها اجتماع منتهيين

$\Rightarrow A\cap B \in \tau_{cf}$

3) $\{A_i : i\in I\} \subseteq \tau_{cf} \Rightarrow A_i$ منتهية $\forall i\in I$

$(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i$ منتهية لأنها تقاطع منتهيات

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_{cf}$.

تمرين: هل $\tau_1 = \tau_2$ ؟؟

لنأخذ $A_n =]a, a+n[\in \tau_1$ وبما أن τ_1 تبولوجيا

فهي مغلقة للاتحاد $\Leftarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, a+n[=]a,\infty[\in \tau_1$

ولنأخذ: $B_n =]a, a+n] \in \tau_2$ وبما أن τ_2 تبولوجيا

فهي مغلقة للاتحاد $\Leftarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, a+n] =]a,\infty[\in \tau_2$

نلاحظ أن هناك عناصر مشتركة بين τ_1 و τ_2 ولكن هل هما متساويين

ومن الواضح أن $]-\infty, b] \notin \tau_1$ ولكن

$\tau_2 \ni]-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{]-n, b]}_{\in \tau_2} =]-\infty, b]$

τ_2 مغلقة للاجتماع

وجدنا عنصر ينتمي لـ τ_2 ولا ينتمي لـ τ_1 $\Leftarrow$ $\tau_2 \neq \tau_1$

تمرين : ارسم الخط البياني للدالة $f:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
حيث $f(x) = \ln(x)$ ؟

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$$

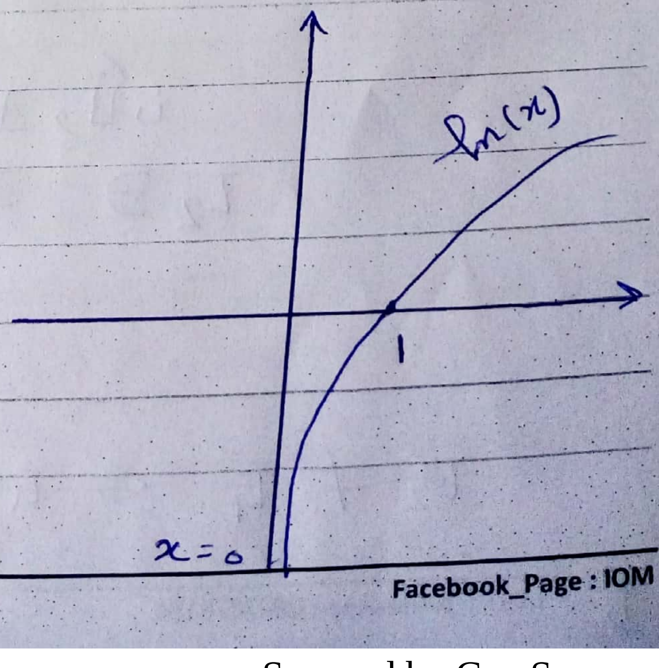
$$\lim_{x \xrightarrow{>} \infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقية على $]0,\infty[$
و $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

وإن $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

و $f(1) = 0$

x	0		∞
$f'(x)$		$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



★ نعرف التابع $d: \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$
هل تشكل d مسافة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل:

الإجابة هي لا ،
ذلك لأن $d(1,2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
وهذا يخالف كون المسافة موجبة دوماً ((غير سالبة)

- لو أخذنا $d(x,y) = \left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|$
- يمكن إثبات أنه تابع مسافة على $\mathbb{R}$ بملاحظة ما يلي :

$d(x,y) = \left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right| = |\ln(x) - \ln(y)|$

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

1) $d(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)| \geq 0$

2) $d(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)|$
$= |\ln(y) - \ln(x)| = d(y,x)$

3) $d(x,y)=0 \iff |\ln(x)-\ln(y)|=0$

$\iff \ln(x)=\ln(y) \iff x=y$

صحيحة لأن اللوغاريتم متباين

4) $d(x,y)=|\ln(x)-\ln(y)| = |\ln(x)-\ln(z)+\ln(z)-\ln(y)|$

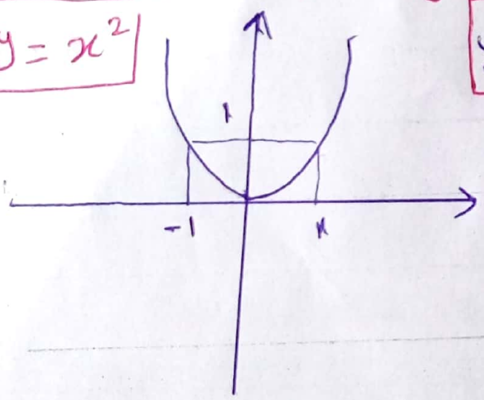
$\leq |\ln(x)-\ln(z)|+|\ln(z)-\ln(y)|$

$\leq d(x,z)+d(z,y)$

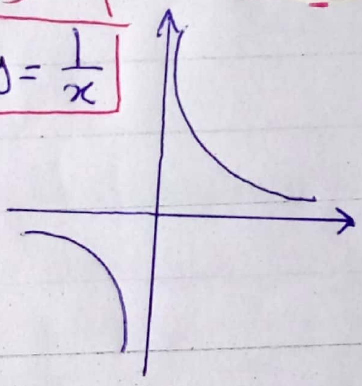
$\Leftarrow$ d مسافة على $\mathbb{R}$

تذكرة بمنحنيات أهم التوابع الحقيقية المألوفة

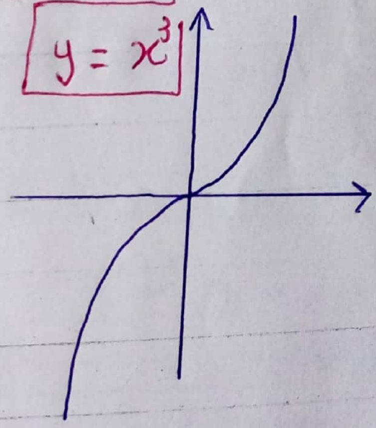
$y=x^2$



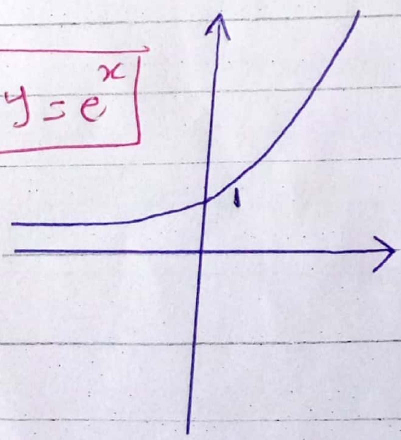
$y=\frac{1}{x}$

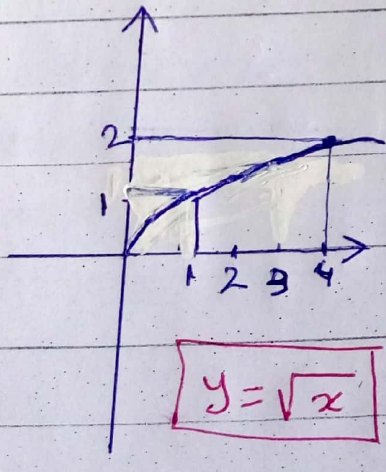


$y=x^3$

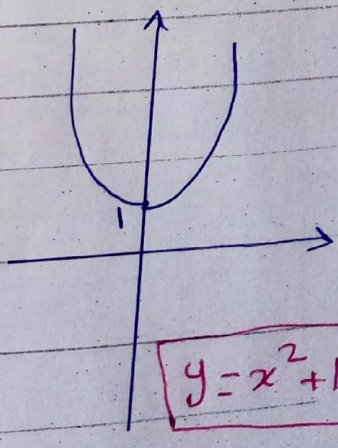


$y=e^x$





$y=\sqrt{x}$



$y=x^2+1$

END

◄ دكتور المادة: د. بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة: تمارين تبولوجية

نظري ☑
عملي ☐

تصطلح بعض المراجع أنه يكفي لكي تكون τ تبولوجيا على $X \neq \phi$ أن تكون مغلقة للتقاطع المنتهي ومغلقة للاتحاد الكيفي أي أن هذه المراجع لا تضع شرطاً ضمن التعريف أن $X, \phi \in \tau$ ويعزى ذلك إلا أن انتماء X, ϕ للصف τ يستنتج من الشرطين السابقين حيث:

$$\bigcap_{i \in \phi} A_i = X \quad , \quad \bigcup_{i \in \phi} A_i = \phi$$

وكون τ مغلقة للتقاطع والاتحاد فإن:

$$X = \bigcap_{i \in \phi} A_i \in \tau \qquad \phi = \bigcup A_i \in \tau$$

التقاطع والاتحاد هنا تتم لمجموعة خالية

يمكن اعتباره اصطلاح ويمكن برهانه كما يلي:

- لنفرض أن $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ إن قولنا أن $x \in A$

هذا يعني أن $\forall i \in I \; ; \; x \in A_i$

وبالتالي متى نقول أن $x \notin A$ ؟

إذا وجد $i_0 \in I$ بحيث $x \in A_{i_0}$ لنأخذ $I = \phi$ عندئذٍ لن يوجد $i_0 \in I = \phi$ يحمل $x \notin A$ وبالتالي

$$\forall x \in X \; ; \; x \in A \Rightarrow X \subseteq A$$

ونعلم أن $A \subseteq X \Leftarrow A = X$

$$\bigcap_{i \in \phi} A_i = X$$

وبشكل مماثل نقول عن $x \in B = \bigcup_{i \in I} B_i$ إذا وجد دليل $i_0 \in I$

بحيث $x \in B_{i_0}$ إذا كانت $I = \phi$ لن يوجد $i_0 \in I$ يحقق المطلوب وبالتالي:

$$\forall x \in X \; ; \; x \notin B \Rightarrow B = \phi$$

$$\bigcup_{i \in \phi} B_i = \phi$$

وقد نوّه الدكتور أنه لا داعي لاستعمال هذه الاصطلاحات وسنكتفي بالتعريف المألوف للتبولوجيا والذي يتضمن ثلاثة شروط

تمرين:

درسنا في المحاضرة السابقة $\mathcal{T}_{cf}$ تبولوجيا المتممات المنتهية
وسنأخذ الآن تبولوجيا المتممات المعدودة $\mathcal{T}_{cc}$

$$\mathcal{T}_{cc} = \{\phi\} \cup \{A \subseteq X ; A^c \text{ معدودة}\}$$

1) $\phi \in \mathcal{T}_{cc}$, $X^c = \phi$ معدودة $\Rightarrow X \in \mathcal{T}_{cc}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{T}_{cc} \Rightarrow A^c , B^c$ معدودتان $\Rightarrow (A \cap B)^c = \underbrace{A^c \cup B^c}_{\text{اجتماع معدودين}}$ معدودة

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_{cc}$$

3) $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_{cc} \Rightarrow \forall i \in I ; A_i^c$: معدودة

$$\Rightarrow \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i^c}_{\text{تقاطع معدودات}} \text{ معدودة} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_{cc}$$

تمرين:

لنأخذ $X = \mathbb{R}$ والتبولوجيا نصف المألوفة $\mathcal{T}_{]a,b]}$
ولنأخذ $A =]0,3] \subseteq \mathbb{R}$ ، أوجد $Fr(A)$ ، $\bar{A}$ و A° ، وهل A متراصة؟

الحل:

قبل أن نوجد $A^\circ , \bar{A}$ سنتأكد من كون A مغلقة أم مفتوحة أم كليهما أم غير ذلك
- إن المجموعة المفتوحة وفق التبولوجيا $\mathcal{T}_{]a,b]}$ هي كل مجموعة تكتب على شكل

مجال من النمط $]a,b[$ أو اجتماع مجالات من النمط $]a,b[$ مفتوحة $A =]0,3]$

$\Rightarrow$

ونعلم أن المفتوحة تساوي داخلها $A^\circ = A =]0,3]$

- إن $A^c =]-\infty,0] \cup]3,\infty[$ إن A^c اجتماع لمفتوحتين فهي مفتوحة

$\Leftarrow$ A مغلقة ونعلم أن المغلقة تساوي لصاقتها

$\Rightarrow \bar{A} = A =]0,3]$

- لنوجد جبهة A أو $Fr(A)$، وهي تعرف كما يلي:

(اللصاقة فرق الداخل) $Fr(A) = \bar{A} - A^\circ$

$\Rightarrow Fr(A) = A - A = \phi$

- هل A متراصة؟ انتبه لا يمكن هنا أن نقول أنها مغلقة ومحدودة أم لا

لأن لا معنى للمحدودية في الفضاءات التبولوجية، لو كان الحديث في فضاءات مترية لكان ذلك ممكناً، ولكننا هنا لابد أن نلجأ للتعريف:

المجموعة المتراصة: نقول عن K إنها متراصة إذا كانت كل تغطية مفتوحة لـ K تملك تغطية جزئية منتهية

تعريف التغطية: لتكن $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من أجزاء X، نقول عن هذه الجماعة إنها تغطية لـ $K \subseteq X$ إذا:

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

وإذا كانت A_i مفتوحات مهما تكن $i \in I$

قلنا إن الجماعة $\{A_i : i \in I\}$ تغطية مفتوحة لـ K

- لنعود إلى المثال السابق:

لو أخذنا المجموعات: $A_n =]\frac{1}{n}, 3] : n \geq 1$

نلاحظ أن

$$A =]0,3] \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n =]0,3]$$

$\Leftarrow$ $\{A_n, n \geq 1\}$ تغطية مفتوحة لـ A

وإن أي جماعة منتهية جزئية من الجماعة $\{A_n\}$ لن تغطي A $\Leftarrow$ A غير متراصة

تمرين: أعد التمرين السابق من أجل التولوجيا $\tau_{]a,\infty[}$

نلاحظ أن $A =]0,3]$ لا تكتب على شكل اتحاد مجالات

من الشكل $]a,\infty[$ $\Leftarrow$ A ليست مفتوحة

وكذلك

$A^c = \underbrace{]-\infty,0]}_{\notin \tau_{]a,\infty[}} \cup]3,\infty[$ $\Longleftarrow$ A ليست مغلقة.

- إن $\bar{A}$ أصغر مغلقة تحوي A وأن المغلقات هنا هي من الشكل

$(]a,\infty[)^c =]-\infty,a]$ $\Rightarrow$ $\bar{A} =]-\infty,3]$

ذلك لأن $]-\infty,3]$ مغلقة وتحوي A

ولا يمكن ايجاد أصغر منها وتحوي A

$\Longleftarrow$ $\bar{A} =]-\infty,3]$

وأن $A^\circ = \phi$ حيث أن A° أكبر مفتوحة محتواة في A

وإن أي مفتوحة مغايرة لـ ϕ ستكون من الشكل $]a,\infty[$

ولن تكون محتواة في A $\Longleftarrow$ $\boxed{A^\circ = \phi}$

- تجدر الإشارة إلى أن في هذا الفضاء:

$\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة وليست مغلقة

$\mathbb{Z}$ " " " " " "

وأن $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$

تمرين: ليكن $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ فضاء تبولوجيا المتممات المنتهية

برهن أن تقاطع أي مفتوحتين لن يكون خالياً في هذا الفضاء

الحل:

سنرمز بالرمز $\mathcal{V}_x$ لمجموعة جوارات النقطة x

ونعلم أن $x \in A'$ $\Longleftrightarrow$ $\forall v \in \mathcal{V}_x \; ; \; (v \cap A) - \{x\} \neq \phi$

ولنفرض جدلاً $x \notin A' \Longleftrightarrow \exists V \in V_x : (V\cap A)-\{x\}=\phi$

$V\cap (A-\{x\})=\phi$

ونعلم أن $A\cap B=\phi \Rightarrow A\subseteq B^c$ ، $B\subseteq A^c$

وبالتالي $\underbrace{A-\{x\}}_{\text{غير منتهية}} \subseteq \underbrace{V^c}_{\text{منتهية}}$

تناقض $\Longrightarrow x\in A'$

تمرين: ليكن $f: X \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ ، عرف التبولوجيا على X :

الحل:

لنأخذ $\tau_X = f^{-1}(\tau_Y) = \{f^{-1}(\theta) : \theta\in\tau_Y\}$

وذلك لأن f^{-1} يحافظ على العمليات ، أي:

1) $f^{-1}(\phi)=\phi$ ، $f^{-1}(Y)=X$

2) $f^{-1}(\theta_1\cap\theta_2) = f^{-1}(\theta_1)\cap f^{-1}(\theta_2)$

3) $f^{-1}(\theta_1\cup\theta_2) = f^{-1}(\theta_1)\cup f^{-1}(\theta_2)$

تمرين: ليكن $f:(X,\tau_X)\longrightarrow Y$ عرف تبولوجيا على Y

إن $\tau_Y=\{u\in P(Y) : f^{-1}(y)\in\tau_Y\}$ تبولوجيا على Y

إعداد

END

رشا رويمي

نذير تيناوي