المحاضرة 7+6

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: تمديد الحقول

نظري ☑
عملي ☐

١٧ + ١٨ / ١٠ / ٢٠١٨

المحتوى العلمي:

1- مبرهنة تخص تمديد الحقول.

2- أمثلة عما سبق.

مثال عن المبرهنة الأخيرة في المحاضرة السابقة.

ليكن $K=\mathbb{Q}$ و $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$ حدودية غير خزولة على $\mathbb{Q}$

وذلك حسب ايزنشتاين حيث عندها: $p=2$

$\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^2-2>}$ ممدد لـ $\mathbb{Q}$ بدرجة تمديد 2 و $\{1, x\}$ قاعدة لـ $\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^2-2>}$ على $\mathbb{Q}$ أي:

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^2-2>}=\{\alpha\cdot 1+\beta x : \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$$

ويحوي أحد أصفار $f(x)$.

<< تنويه >> يجب الانتباه بين $x$ و $X$.

تعريف: $K$ حقل و $\Omega$ حقل كبير يحوي $K$ و $S\subseteq\Omega$ مجموعة جزئية في $\Omega$ عندها نعرف $K(S)$ أصغر الحقول الجزئية في $\Omega$ التي تحوي $K$ و $S$.

فمثلاً: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\{\sqrt{2}\})$ أصغر حقل في $\mathbb{C}$ يحوي $\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}$

• $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\{\sqrt{2},\sqrt{3}\})$ أصغر الحقول الجزئية في $\mathbb{C}$ التي تحوي $\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$

• $\mathbb{R}(i)$ أصغر الحقول في $\mathbb{C}$ التي تحوي $\mathbb{R}$ و $i$.

• $\mathbb{Q}(i)$ أصغر الحقول التي تحوي $\mathbb{Q}$ و $i$.

مبرهنة: لتكن $K$ حقل و $f(x)$ حدودية غير فزولة على $K$ أحد أصفارها $\alpha$ عندها يوجد تماثل التالي

$$\frac{K[x]}{\langle f(x)\rangle} \cong K(\alpha)$$

البرهان:

لتكن

$$\varphi : K[x] \longrightarrow K(\alpha)$$
$$x \longmapsto \alpha$$

• $\varphi$ تشاكل وضوحاً

• $\ker\varphi = \{ g(x) \in K[x] : g(\alpha) = 0 \}$

نعلم أن $f(x) \in \ker\varphi$ وغير فزولة على $K$ إذاً $\langle f(x)\rangle = \ker\varphi$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد $\frac{K[x]}{\langle f(x)\rangle} \cong \operatorname{Im}\varphi$ (*)

ليتم المطلوب بقي إثبات أن $\operatorname{Im}\varphi = K(\alpha)$

نلاحظ حسب المبرهنة السابقة أن $\frac{K[x]}{\langle f(x)\rangle}$ ممدد لِ $K$

فحسب (*) نجد أن $\operatorname{Im}\varphi$ حقل يحوي $K$.

إن $\varphi(x) = \alpha$ أي $\alpha \in \operatorname{Im}\varphi$ ومنه $\operatorname{Im}\varphi$ حقل يحوي

$\alpha$ و $K$ لكن $K(\alpha)$ هو أصغر الحقول التي تحوي $K$ و $\alpha$ $\Leftarrow$

$\operatorname{Im}\alpha \subseteq K(\alpha)$ و $\operatorname{Im}\varphi \subseteq K(\alpha)$ وضوحاً

$\Leftarrow$ $\operatorname{Im}\alpha = K(\alpha)$ إذاً

$$\frac{K[x]}{\langle f(x)\rangle} \xrightarrow{\cong} K[\alpha] = \operatorname{Im}\alpha$$
$$x \longmapsto \alpha$$

أمثلة:

$\boxed{1}$ $K$ حقل و $f(x) = x - a$ حدودية من $K[x]$

إن $\frac{K[x]}{\langle x-a\rangle}$ تمديد لِ $K$ بدرجة $= 1$ و $\{1\}$ قاعدة

هذا الحقل على $K$ أي $\frac{K[x]}{\langle x-a\rangle} = \{ \delta . 1 : \delta \in K \} = K$

أي $K = K(a)$ فمثلاً $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(3)$

نلاحظ أن التمديد بعنصر من الحقل لا يعطي شيئاً جديد.

$\boxed{2}$ لتكن $K=\mathbb{Q}$ و $f(X)=X^2-2\in\mathbb{Q}[X]$ إذن

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle X^2-2\rangle}=\{\alpha+\beta x:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$$

وكذلك

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle X^2-2\rangle}\xrightarrow{\;\cong\;}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$x\longmapsto\sqrt{2}$$

لأن $\sqrt{2}$ هو حل $X^2-2$

وبالتالي $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{\alpha+\beta\sqrt{2}:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$

إذن $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ هو أصغر الحقول التي تحوي $\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}$ وهو تمديد الحقل $\mathbb{Q}$ بدرجة تمديد تساوي 2.

$\boxed{3}$ لتكن $K=\mathbb{R}$ و $f(X)=X^2+1\in\mathbb{R}[X]$ غير خزولة على $\mathbb{R}$

إذن $\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2+1\rangle}=\{\alpha.1+\beta x:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ ممدد لـ $\mathbb{R}$ بدرجة تمديد تساوي 2 ويحوي أحد أصفار $f(x)$ كذلك

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2+1\rangle}\xrightarrow{\;\cong\;}\mathbb{R}(i)$$
$$x\longmapsto i$$

$$\mathbb{R}(i)=\{\alpha+\beta i:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{C}$$

إذن $\mathbb{R}(i)=\mathbb{C}$ أصغر الحقول التي تحوي $\mathbb{R}$ و $i$ وهو تمديد لـ $\mathbb{R}$ بدرجة تمديد $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$.

$\boxed{4}$ لتكن $K=\mathbb{Q}$ و $f(X)=X^2+1\in\mathbb{Q}[X]$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$

لأنه $\frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle X^2+1\rangle}=\{\alpha.1+\beta x:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ ممدد لـ $\mathbb{Q}$ بدرجة تمديد تساوي 2 ويحوي أحد أصفار $f(x)$ وكذلك

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle X^2+1\rangle}\xrightarrow{\;\cong\;}\mathbb{Q}(i)$$
$$x\longmapsto i$$

$$\mathbb{Q}(i)=\{\alpha+\beta i:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$$

تمديد بدرجة 2 للحقل $\mathbb{Q}$.

تمرين 1) ليكن $K=\mathbb{Q}$ و $f(x)=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ والمطلوب

1- أثبت أن $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$

2- أوجد عناصر $\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^3-2>}$ وأحسب درجة تمديده على $\mathbb{Q}$

3- أوجد شكل عناصر كل من:

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ , $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,j)$ , $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,j^2)$

الحل: 1- حسب ايزنشتاين حيث $p=2$ نجد أن $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$.

2- إن $\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^3-2>}$ تمديد لـ $\mathbb{Q}$ بدرجة تمديد تساوي 3

والقاعدة كفضاء شعاعي على $\mathbb{Q}$ هي $\{1, x, x^2\}$

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^3-2>}=\{a.1+bx+cx^2 : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$$

3- لتكن $\alpha$ صفر لـ $f(x)$ عندها

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{<x^3-2>}\xrightarrow{\cong}\mathbb{Q}(\alpha)$$
$$x\longmapsto\alpha$$

عندها: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c(\sqrt[3]{2})^2 ; a,b,c\in\mathbb{Q}\}$

وبالمثل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,j)=\{a+b(\sqrt[3]{2}\,j)+c(\sqrt[3]{2}\,j)^2 : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$

وأيضاً $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,j^2)=\{a+b(\sqrt[3]{2}\,j^2)+c(\sqrt[3]{2}\,j^2)^2 : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$

نلاحظ أن الحقول الثلاثة السابقة متماثلة ولكنها ليست متساوية

تمرين 2) ليكن $K=\mathbb{F}_2=\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ; $f(x)=x^2+x+1\in\mathbb{F}_2[x]$

والمطلوب 1- أثبت أن $f(x)$ غير خزولة على $\mathbb{F}_2$

2- لتكن $\alpha$ أحد أصفار $f(x)$ تحدث عن الحقل $\mathbb{F}_2(\alpha)$

3- ضع شكل الفاثري جدول كيلي.

الحل: 1- كون $f(x)$ حدودية من الدرجة 2 لندرس أصفار

في $\mathbb{F}_2$ نجد $f(0)=1\neq 0$ , $f(1)=1\neq 0$

وذلك كون $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}=\mathbb{F}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ $\Leftarrow$ $f(x)$ لا تحوي أي صفر في $\mathbb{F}_2[x]$

$\Leftarrow$ $f(x)$ غير خزولة.

2- بما أن $\frac{\mathbb{F}_2[x]}{<x^2+x+1>}$ حقل ممدد لـ $\mathbb{F}_2$ بدرجة تمديد 2 وعناصره

من الشكل $a\cdot 1+bx$ حيث $a,b\in\mathbb{F}_2$ وبالتالي

وبما أن $\mathbb{F}_2(\alpha)\cong\frac{\mathbb{F}_2[x]}{<x^2+x+1>}$ تمديد لـ $\mathbb{F}_2$ و $[\mathbb{F}_2(\alpha):\mathbb{F}_2]=2$

و $\mathbb{F}_2(\alpha)=\{a+b\alpha : a,b\in\mathbb{F}_2\}$

$\Rightarrow \mathbb{F}_2(\alpha)=\{0,1,\alpha,1+\alpha\}$

حيث نعوض عناصر $\mathbb{F}_2$ وهي 0,1 في $a+b\alpha$

نلاحظ أن $\mathbb{F}_2(\alpha)$ مميزه 2 لأنه يحوي $\mathbb{F}_2$ الذي مميزه 2 أيضاً

3-

| $+$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | $1+\alpha$ | $\alpha$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ | $0$ | $1$ |
| $1+\alpha$ | $1+\alpha$ | $\alpha$ | $1$ | $0$ |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ |
| $\alpha$ | $0$ | $\alpha$ | $1+\alpha$ | $1$ |
| $1+\alpha$ | $0$ | $1+\alpha$ | $1$ | $\alpha$ |

• $(1+\alpha)^2=1+\alpha+\alpha+\alpha^2=\alpha$ حيث استفدنا من كون

كون $\alpha$ صفر لـ $f(x)$ فإن $1+\alpha+\alpha^2=0$

• $\alpha^2+\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2=-(\alpha+1)=1+\alpha$

لأن $\Leftarrow$ $(1+\alpha)+(1+\alpha)=2+2\alpha=0$

$\Rightarrow (1+\alpha)=-(1+\alpha)$

وظيفة: أعد السؤال السابق من أجل $K = \mathbb{F}_2$ و $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2(x)$

تمرين 3: لتكن $K = \mathbb{Q}$ والمطلوب:

1- $\alpha = \sqrt{2}$ أوجد الحدودية غير الخزولة على $\mathbb{Q}$ والتي تقبل $\alpha$ صفراً لها ارمز لها بـ $f(x)$

2- أوجد شكل عناصر $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ وأحسب $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

3- لتكن $\beta = \sqrt{3}$ أوجد الحدودية غير الخزولة على الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ والتي تقبل $\beta$ صفراً لها ارمز لها بـ $g(x)$

4- أوجد شكل عناصر $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$

5- أثبت أن $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

الحل: $\boxed{1}$ $x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$

$\boxed{2}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ ممدد لـ $\mathbb{Q}$ من درجة 2

$\boxed{3}$ $x = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow g(x) = x^2 - 3$

حدودية غير خزولة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\boxed{4}$ $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]}{\langle g(x) \rangle}$ حقل ممدد لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ بدرجة تمديد تساوي 2.

$$\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]}{\langle g(x) \rangle} = \{a \cdot 1 + bx : a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$$

بما أن $\beta$ أحد أصفار $g(x)$ ومنه نجد أن

$$\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]}{\langle g(x) \rangle} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\beta)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a \cdot 1 + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\sqrt{2}\}$$

حيث $a = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{2}$ , $b = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{2}$ : $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2}) \cdot 1 + (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{2})\sqrt{3} : \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}\}$$

$$= \{\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2} + \alpha_2\sqrt{3} + \beta_2\sqrt{6} : \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}\}$$

$\boxed{5}$ سوف يتم حله في المحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة...

إعداد: شهد الخليل البوشي