المحاضرة السابعة

نظري ■
عملي □

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: المنحنيات

* المنحنيات :

- مقدمة: إن الأداة الرئيسية لدراسة منحنيات ستكون التمثيلات الوسيطية وبما أنه يجب عدم التمييز بين تمثيل "وآخر" مكافئ له سندرس صفوف التكافؤ ونفضلها ذلك على تمثيل الوسيطي ذاته.

إن علاقة التكافؤ على مجموعة التمثيلات الوسيطية مستمرة ومتباينة موضعياً على منطلقها تجزئ هذه مجموعة إلى صفوف التكافؤ.

*** تعريف :** نسمي أي صف تكافؤ من التمثيلات الوسيطية منحنياً موجهاً ويمكن أن نقول أيضاً أن صف تكافؤ يعرف منحنياً موجهاً.

إذا كان $\mathcal{L}$ منحنياً معرفاً بصف تكافؤ $[\vec{r}]$ فإننا نسمي $\vec{r}$ تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به لـ $\mathcal{L}$ وأي تمثيل وسيطي منتمي للصف $[\vec{r}]$ سنسميه أيضاً تمثيلاً وسيطياً مسموحاً به لـ $\mathcal{L}$

*** ملاحظة :** سندرس منحني كصف تكافؤ وليس كمجموعة نقاط.

*** مثال :** ليكن L دائرة الواحدة الممسوحة مرة واحدة باتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) عندئذ سيكون $\mathcal{L}$ معرفاً بصف تكافؤ $[\vec{r}_1]$ حيث

$$\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

وأنه تمثيل مسموح به انطلاقاً من نقطة $(1,0)$ وهل r_1 تمثيل وسيطي مسموح به؟؟

*** الحل :** نعم لأن دائرة واحدة مجموعة نقطية وأن r_1 سيمسح مجال مرة واحدة وعندما t زاد t سيدور المتجه عكس عقارب الساعة إذاً هو ممثل مسموح به لـ $\mathcal{L}$

أما التمثيل $r_2(\tau) = (\cos \tau, \sin \tau) \quad \tau \in [0, 4\pi)$ هو تمثيل وسيطي غير مسموح به لـ $\mathcal{L}$ لأن $\mathcal{L}$ ممسوحة مرتين

ثم اثبت ان $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ؟؟

. لانه يوجد نقاط بـ Γ_2 ممسوحة مرتين (اي مضاعفة) وعدم وجود دالة
وكذ الك $\Gamma_3(t) = (\cos u, -\sin u) ; u \in [0, 2\pi]$ تمثيل غير ممسوح به
لـ $\mathcal{L}$ لانه يمسح دائرة واحدة باتجاه عقارب ساعة.

* تعاريف :

[1] اذا كان
$$\Gamma_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\Gamma_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
تمثيلين وسيطين ممسوح بهما لمنحني $\mathcal{L}$ ثابت والثنائيات $(t, \vec{\Gamma}_1(t))$ و $(\tau, \vec{\Gamma}_2(\tau))$
يعينان النقطة ذاتها في المجموعة النقطية المشتركة المرتبة لهما اذا كان $t = \phi(\tau)$
اي اذا كان الوسيطين t و τ متقابلان

[2] اذا كان أحد تمثيلات منحنياً $\mathcal{L}$ ((اي ممسوح به لـ $\mathcal{L}$)) معرفاً على مجال مغلق فأننا
نسمي منحني $\mathcal{L}$ منحنياً متراصاً ((أطراف منحني سيكون منتمية له))

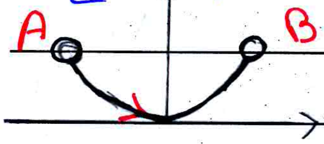
مثال دائرة الواحدة ممسوحة مرة واحدة باتجاه موجب منحني متراص لان
$\Gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ تمثيل ممسوح به لمحيط دائرة ممسوحة مرة واحدة باتجاه موجب
وهذا التعريف معرف على مجال مغلق اذاً هذا منحني متراص.

[3] اما اذا كان أحد تمثيلات منحني $\mathcal{L}$ معرفاً على مجال مفتوح فإننا نسمي $\mathcal{L}$ منحنياً
مفتوحاً ((اطراف هذا منحني ليست منه))

* اثبت ان اي تمثيل لمنحني متراص سيكون معرفاً على مجال مغلق

* لنا هذا منحني $(\cos t, \sin t)$ معرف على مجال $]\frac{\pi}{6}, 3\pi[$ اذاً المجموعة النقطية
هي عبارة عن قوس بسيط على رغم من ان هذا تمثيل معرف على مجال مفتوح

* مثال :



ليكن h منحنياً ممثلاً بـ : $\vec{\Gamma} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\Gamma(t) = (t, t^2)$ ماهو هذا منحني ؟ وهل هو منحني مفتوح ؟ ولماذا
هذا منحني هو قوس قطع مكافئ بين نقطتين $A(-1, 1)$ و $B(1, 1)$ ممسوح مرة واحدة
من النقطة A الى النقطة B دون طرفيه وان هذا منحني مفتوح لان تمثيله Γ معرف على مجال مفتوح

** التربيع مرة اخرى **

المحاضرة الثامنة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تمارين وبعض تعاريف

نظري / عملي

اذا كان $(I_1,\vec{r}_1) \sim (I_2,\vec{r}_2)$ فإن :

أن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ يزودان المجموعة النقطية المشتركة لهما بالتوجيه ذاته بمعنى أن رأس المتجه $\vec{r}_1(t_1)$ يأتي قبل رأس المتجه $\vec{r}_2(\tau_2)$ في المجموعة النقطية المرتبة بواسطة $\vec{r}_2$

هذا يعني ان $\tau_1 < \tau_2$ $\forall \tau_2 \in I_2$.

لتكن $t_1 = \phi(\tau_1)$, $t_2 = \phi(\tau_2)$ بما ان $\tau_1 < \tau_2$ فإن

$\phi(\tau_1) < \phi(\tau_2)$ و ϕ متزايدة $t_1 < t_2$

وبالتالي رأس $\vec{r}_1(t_1)$ يأتي قبل رأس $\vec{r}_2(t_2)$.

*مثال : أثبت ان العلاقة $\sim$ علاقة تكافؤ : (سنثبت انها تناظرية وانعكاسية ومتعدية)

لنثبت انها انعكاسية (هذا يعني $(I_1,\vec{r}_1) \sim (I_1,\vec{r}_1)$)

لنأخذ التطبيق المطابق Id :

$$Id : I_1 \xrightarrow[\text{متزايد ومستمر}]{\text{غامر}} I_1$$

ويحقق $t \longrightarrow t$

$$\vec{r}_1 \circ Id = \vec{r}_1$$

$$Id(t) = t \;;\; t \in I_1$$

متزايدة تماماً على R : $(Id(t))' = 1 > 0$

$\Leftarrow$ متزايدة على $I_1 \subseteq R$

وإن $\phi(t) = t$ كثير حدود مستمر على R $\Leftarrow$ ϕ مستمر على $I_1 \subseteq R$

وواضح ان ϕ غامر.

$$\vec{r}_1 \circ \phi(t) = \vec{r}_1(\phi(t)) = \vec{r}_1(t) \quad \forall\, t \in I$$

$$\Leftarrow \vec{r}_1 \circ \phi = \vec{r}_1$$

$\Leftarrow$ $(I_1,\vec{r_1}) \sim (I_1,\vec{r_1}) \Leftarrow$ انعكاسية

* تناظرية $(I_2,\vec{r_2}) \sim (I_1,\vec{r_1}) \Leftrightarrow (I_1,\vec{r_1}) \sim (I_2,\vec{r_2})$

$(I_1,\vec{r_1}) \sim (I_2,\vec{r_2}) \Leftrightarrow \exists\, \phi : I_2 \longrightarrow I_1$ غامر ومستمر ومتزايد

ويحقق $\vec{r_2} = \vec{r_1} \circ \phi$

مبرهنة $\boxed{1}$: ليكن $\phi : I_2 \longrightarrow I_1$ دالة مطردة تماماً وغامرة عندئذ فإن ϕ تقابل لذلك الدالة ϕ^{-1} جهة أطراد نفسها.

* مبرهنة $\boxed{2}$: ليكن $\phi : I_2 \longrightarrow R$ تابعاً مطرداً تماماً ومستمراً عندئذ يكون $I_1 = \phi(I_2)$ مجال من R ويكون التابع عكسي للتابع ϕ مستمر على I_1

- حسب المبرهنتين السابقتين:

$\exists\, \phi^{-1} : I_1 \longrightarrow I_2$

ويحقق $\vec{r_1} = \vec{r_2} \circ \phi^{-1}$

$\vec{r_2} = \vec{r_1} \circ \phi$

$\vec{r_2} \circ \phi^{-1} = \vec{r_1} \circ \phi \circ \phi^{-1}$

$\vec{r_2} \circ \phi^{-1} = \vec{r_1}$

بعودة للمثال سابقة:

ولنثبت انها متعدية

$(I_1,\vec{r_1}) \sim (I_2,\vec{r_2})$ و $(I_2,\vec{r_2}) \sim (I_3,\vec{r_3}) \Rightarrow (I_1,\vec{r_1}) \sim (I_3,\vec{r_3})$

$(I_1,\vec{r_1}) \sim (I_2,\vec{r_2}) \Leftrightarrow \exists\, \phi_1 : I_1 \longrightarrow I_2$

غامر ومتزايد تماماً ومستمر

$\vec{r_1} = \vec{r_2} \circ \phi_1$

غامر ومتزايد تماماً ومستمر

$(I_2,\vec{r_2}) \sim (I_3,\vec{r_3}) \Leftrightarrow \exists\, \phi_2 : I_2 \longrightarrow I_3$

$\vec{r_2} = \vec{r_3} \circ \phi_2$

$\phi = \phi_2 \circ \phi_1 : I_1 \xrightarrow{\phi_1} \phi_1(I_1) = I_2 \xrightarrow{\phi_2} \phi_2(I_2) = I_3$

غامر ϕ_1 غامر ϕ_2

$\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_3 \circ \varnothing$

- تركيب دوال متزايدة هو دالة متزايدة .
- تركيب دوال غامرة هو دالة غامرة .
- تركيب دوال مستمر هو دالة مستمرة .

$\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_2 \circ \varnothing_1 = \vec{\gamma}_3 \circ \varnothing_2 \circ \varnothing_1 = \vec{\gamma}_3 \circ \varnothing$

*ملاحظة: بما أن تركيب دالتين متناقصتين دالة متناقصة فالتمثيلات المتماكسة لن تشكل علاقة تكافؤ .

*مثال: ((على تركيب دالتين متناقصتين ليس دالة متناقصة))

$f = -t \quad , \quad g = -t$

$f \circ g = (-t) \circ (-t) = -(-t) = t$ دالة متزايدة

*تمرين:

أثبت أن التمثيلين $\vec{\gamma}_2 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto (\cos t, \frac{\cos 2t+1}{2})$, $t \longmapsto (t, t^2)$

متكافئان ؟؟

*الحل:

$\varnothing : I_2 \longrightarrow I_1$

$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\varnothing(\tau))$

$(\cos \tau, \frac{\cos 2\tau+1}{2}) = (\varnothing(\tau), (\varnothing(\tau))^2)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varnothing(\tau) = \cos \tau \\ \varnothing(\tau) = \frac{\cos 2\tau+1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \varnothing(\tau) = \cos \tau \ : \tau \in [\pi, 2\pi]$

$\varnothing'(\tau) = (\cos 2t)' = -\sin \tau > 0 \qquad \tau \in]\pi, 2\pi[$

وبالتالي $\varnothing$ متزايدة على مجال $]\pi, 2\pi[$ لكن $\varnothing$ مستمرة على $[\pi, 2\pi]$ وبالتالي

$\varnothing$ متزايدة تماماً على مجال $[\pi, 2\pi]$.

*ملاحظة: لمعرفة إذا كان التابع متزايد أو متناقص نسير على البيان من اليسار الى اليمين

- كل مستقيم أفقي يقطع البيان بـ نقطتين على الأقل يكون غير متباين.
- اذا عرفت صفات وخواص التمثيل على مجال $[0,1]$ فإن سنحصل على صفاته وخواصه على اي مجال

*تعاريف:

- نقول عن منحني مفتوح انه من صنف C_n أو C^n إذا وجد بين تمثيلات الوسيطية مسوغة واحد على الأقل $\vec{r}:]a,b[\longrightarrow R^3$ واحد على الأقل من صنف C_n
- نقول عن دالة حقيقية من صنف C_n اذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق حتى مرتبة n وكان مشتقاتها من مرتبة n مستمرة على مجال مفتوح.
- نقول عن دالة متجهية العمية من الصف C_n على ذلك مجال اذا وفقط اذا كانت جميع مركباتها من صنف C_n

*تمرين:

ليكن لدينا منحني ممثل بـ $\vec{r_1}:]-1,1[\longrightarrow R^2$ و $\vec{r_1}(t)=(t,t^2)$

هل هو من الصف C_n ؟؟

نعم لأنه منحني مفتوح ((لان تمثيله $\vec{r_1}$ معرف على مجال مفتوح)) وتمثيله $\vec{r_1}$ من الصف C_n ((لان مركباته t و t^2 من الصف C_n))

*ملاحظة: أي كان كثير حدود من صنف C_n ايا كانت n فإنه من صنف C_k و $k \leq n$

*** انتهت محاضرة ***