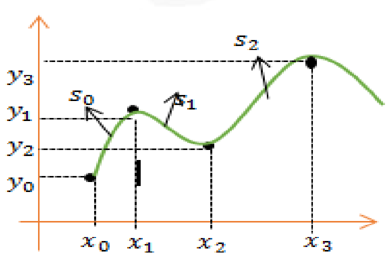
◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄المحاضرة : الخامسة عشر   العنوان: الاستيفاء بكثيرات الحدود

مرحبا اصدقائي: نكمل معكم زملائي بحثنا الذي كان بعنوان "الاستيفاء بكثيرات الحدود"

الطريقة الرابعة: طريقة سبلين ((Splin))

هذه الطّريقة تختلف عن الطرق الثلاث السابقة (لاغرانج – هرميت – نيوتن) حيث أنّ الطّرق الثلاث السابقة تعتمد على أن نأخذ حدودية تحوي جميع النقاط أما في طريقة سبلين سنأخذ الحدودية على مجالات



حيث أنّه تقسم الحدودية إلى أنواع:

١. حدوديّة من الدرجة الأولى لكنها لا تصلح بسبب الانكسار حيث لا تقبل الاشتقاق
٢. حدوديّة من الدرجة الثّانية
٣. حدوديّة من الدرجة الثّالثة
٤. حدوديّة من الدرجة الرّابعة(لكن الخطأ فيها كبير جداً)

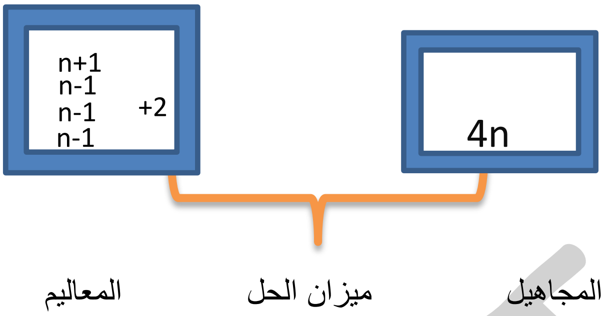
سندرس نحن حدوديّات الدّرجة الثّالثة وسميت حدودية سبلين التكعيبية وهي من الشكل (*)

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & ;x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & ;x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x)=a_{n-1}x^3+b_{n-1}x^2+c_{n-1}x+d_{n-1} & ;x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد حدودية بين كل نقطتين متتاليتين

لتكن لدينا النقاط $(x_n, y_n)\,.\,.\,.\,.\,\dots\dots\,(x_0, y_0)$ ولدينا $(n+1)$ نقطة مختلفة سنقوم باستيفاء الدالة التي تمر بهذه النقاط بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة ندعو x_0 نقطة البداية والنقاط $(x_1 \;\dots\dots x_{n-1})$ ندعوها " العقد" ونقطة النهاية x_n

تحوي جملة المعادلات في كثير حدود سبلين السابق التي عددها n تحوي على $4n$ مجهول



الشروط التي يجب أن تحققها هذه الحدوديات:

١) $s(x_i) = y_i \quad ; i = 0,1,\dots\dots n$ ، يدعى شرط الاستيفاء الأصلي وفيه $n+1$ معلومة

٢) شرط العقد:

a) شرط الاتصال وفيه $n-1$ معلومة

$$s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0,\dots\dots.n-2$$

b) شرط الاستمرار (مرتبط بالمشتقات وفيه $n-1$ معلومة)

$$S'_j(x_{j+1}) = s'_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0,\dots\dots.n-2$$

c) شرط التقعر (يأتي من المشتق الثاني وفيه $n-1$ معلومة)

$$S''_j(x_{j+1}) = s''_{j+1}(x_{j+1}) \qquad ; j = 0,\dots\dots.n-2$$

٣) الشروط الحدية(حدوديات سبلين لها شكلين):

أ) شريحة طبيعية أو (حرة): يكون $s''(x_0) = 0 \;,\; s''(x_n) = 0$ وفيها ٢ معلوم

ب)شريحة مقيدة: $s'(x_n) = f'(x_n) \;,\; s'(x_0) = f'(x_0)$ وفيها ٢ معلوم

مثال: ليكن لدينا دالة سبلين الطبيعية التي يستوفي الدالة f عند النقاط :

$x_2 = 3$ نقطة النهاية ، $x_1 = 2$ العقدة ، $x_0 = 1$ نقطة البداية

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3 & ; 1 \le x \le 2 \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & ; \; 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

أوجد الثوابت a, b, c, d

الحل:

لتحديد الثوابت نطبق شروط الاستيفاء بحدوديات سبلين :

١) شرط الاستيفاء العام : $i = 0, \dots \dots \dots, n$; $s(x_i) = y_i$ ، لا يمكن تطبيق الشرط لأن y_i مجهولة

٢) شرط العقد : بداية سنوجد المشتقات لتنظيم الحل :

$$s_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3$$

$$s`_0(x) = 2 - 3(x-1)^2 \quad , \quad s``_0(x) = -6(x-1)$$

$$s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$$

$$s`_1(x) = \mathrm{b} + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2$$

$$s``_1(x) = 2c + 6d(x-2)$$

أ. شرط الاتصال :

$$j = 0, \dots, n-2 \text{ حيث } s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1})$$

$$s_0(x_1) = s_1(x_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(x-1) - (x-1)^3 = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 \\ (x_1 = 2) \Rightarrow \quad 2(2-1) - (2-1)^3 = a + b(2-2) + c(2-2)^2 + d(2-2)^3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{a} = 1$$

ب. شرط الاستمرار :

$$j = 0, \dots, n-2 \text{ حيث } \acute{s}_j(x_{j+1}) = \acute{s}_{j+1}(x_{j+1})$$

$$\acute{s}_0(x_1) = \acute{s}_1(x_1)$$

$$2 - 3(x-1)^2 = b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2:$$

$$(x_1 = 2) \Rightarrow \quad 2 - 3(2-1)^2 = b + 2c(2-2) + 3d(2-2)^2\}$$

$$\Rightarrow b = -1$$

ت. شرط التقعر :

$$j = 0, \dots, n-2 \text{ حيث } s``_j(x_{j+1}) = s``_{j+1}(x_{j+1})$$

$$s``_0(x_1) = s``_1(x_1)$$

$$(x_1 = 2 \Rightarrow) \quad -6(x-1) = 2c + 6d(x-2)$$
$$-6(2-1) = 2c + 6d(2-2)$$
$$\Rightarrow c = -3$$

٣) الشروط الحدية : بما أن شريحة سبلين طبيعية فإنها تحقق: $s``_0(x_0) = 0$

حيث أن $x_0 = 1$ $\quad s``_0(x_n) = 0$

$$-6(x-1) = 0 \Rightarrow -6(1-1) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$2c + 6d(x-2) \Rightarrow s``_0(x_0) = 0$ أي $s``_0(x_n) = 0$ ومنه $s_1(x_2) = 0$

بما أن $c = -3$, $x_2 = 3$ $\Leftarrow$ $2(-3) + 6d(3-2) = 0$

$$\Rightarrow d = 1$$

مثال(٢) : ليكن لدينا دالة سبلين التكعيبية المعطاة بالشكل :

نقطة النهاية $x_3 = 2$, و العقد $x_1 = -1, x_2 = 1$, نقطة البداية $x_0 = -2$

$$s(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ; -2 \le x \le -1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & ; -1 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 & ; \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

والمطلوب a, b, c, d

الحل:

لتحديد الثوابت a, b, c, d نطبق شروط الاستيفاء بحدوديات سبلين :

١) شرط $s(x_i) = y_i \, ; i = 0, \dots, n$ **، لا يمكن تطبيق الشرط لأن** y_i **مجهولة الاستيفاء العام :**

ولدينا : نقطة النهاية $x_3 = 2$, و العقد $x_1 = -1, x_2 = 1$, نقطة البداية $x_0 = -2$

٢) شرط العقد : بداية سنوجد المشتقات لتنظيم الحل :

$$s_0(x) = (x+1)^3$$

$$s`_0(x) = 3(x+1)^2$$

$$s``_0(x) = 6(x+1)$$

$$s_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$s`_1(x) = 3\mathrm{ax}^2 + 2\mathrm{bx} + c$$

$$s``_1(x) = 6\mathrm{ax} + 2\mathrm{b}$$

$$s_2(x) = (x-1)^2$$

$$s`_2(x) = 2(x-1)$$

$$s``_2(x) = 2$$

أ. شرط الاتصال :

$s_j(x_{j+1}) = s_{j+1}(x_{j+1})$ حيث $j = 0,..,n-2$

أي $s_0(x_1) = s_1(x_1)$

$$\left.\begin{array}{r} (x+1)^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ (x_1 = -1) => \quad (-1+1)^3 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow -\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c} + \mathrm{d} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$ (1

وأيضا $s_1(x_2) = s_2(x_2)$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)^2$$

$$(x_2 = 1) => \quad a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = (1-1)^2$$

$=> a + b + c + d = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$

شرط الاستمرار :

$\acute{s}_j(x_{j+1}) = \acute{s}_{j+1}(x_{j+1})$ حيث $j = 0,..,n-2$

أي $\acute{s}_0(x_1) = \acute{s}_1(x_1)$

$$3(x+1)^2 = 3ax^2 + 2bx + c:$$

$$(x_1 = -1) => \quad 3(-1+1)^2 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c\}$$

$\Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$

وأيضا $s_1`(x_2) = s_2`(x_2)$

$$3ax^2 + 2bx + c = 2(x-1)$$
$$(x_2 = 1) \Rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 2(1-1)$$
$$\Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

ب. شرط التقعر :

$$s``_j(x_{j+1}) = s``_{j+1}(x_{j+1}) \quad \text{حيث} \quad j = 0,..,n-2$$
$$s``_0(x_1) = s``_1(x_1)$$
$$6(x+1) = 2\text{ax} + 2\text{b}$$
$$(x_1 = -1) \Rightarrow 6(-1+1) = 6a(-1) + 2b$$
$$\Rightarrow -6a + 2b = 0 \dots\dots (5)$$

وأيضا $s_1``(x_2) = s_2``(x_2)$

$$6ax + 2b = 2$$

$$(x_2 = 1) \Rightarrow 6a(1) + 2b(1) = 2$$

$$\Rightarrow 6a + 2b = 2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

بالحل المشترك للمعادلات السابقة نوجد a ,b ,c ,d :

نجمع المعادلات (5) و(6) :

-6a+2b=0

+ 6a+2b=2

0+4b=2 => 4b=2 => b=$\frac{1}{2}$

نعوض قيمة b في المعادلة (6)

$$6a + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$6a + 1 = 2 \Longrightarrow 6a = 2 - 1$$

$$6a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{6}$$

نعوض قيمة a, b في المعادلة (4)

$$3a + 2b + c = 0$$

$$3\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + c = 0$$

$$\frac{1}{2} + 1 + c = 0 \;=> \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + c = 0$$

نوحد المقامات $(1)\ \ (2)$

$$=> \frac{3}{2} + c = 0 => c = -\frac{3}{2}$$

نعوض قيمة a, b, c في المعادلة (2)

$$a + b + c + d = 0 \;=>$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + d = 0 \;=>$$

نوحد المقامات $(1)(3)\ (3)$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{9}{6} + d = 0 \;=>$$

$$\frac{-5}{6} + d = 0 \;\; => d = \frac{5}{6}$$

٣) لا يوجد حاجة للشروط الحدية لأن الدالة s لم تحدد طبيعتها.

" انتهت المحاضرة "

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عيد

تنسيق: ولاء الأخضر