نظري

◄ دكتور المادة: نايف طلي

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي في هذه المحاضرة :

حول المتتاليات العددية اللانهائية .

تمرين

١- اثبت تقارب المتتالية التالية بلغة ε من القيم المقابلة لها.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}; \mathrm{n} \to 0, \left\{\frac{n^2-n}{n^2+1}\right\}; n \to 1$$

$$\{\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})\}; n \to \frac{1}{2}$$

$$\left\{\frac{5n^3-2n}{3n^3-n+1}\right\}; n \to \frac{5}{3}$$

٢- أوجد نهاية المتتالية

$$\left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}; \quad \text{حيث} \quad 0 \leq a < \infty$$

٣- أثبت أن المتتالية التي حدها العام المعطى بالشكل:

$$\{a_n\} = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{2+3^2} + \frac{1}{n+3^n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots \dots \dots \dots . + \frac{1}{2^n+1}$$

٥- أوجد نهاية المتتالية :

$$\{a_n\} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots \ldots\ldots\ldots.. + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

٦- اكتب المتتالية التي حدها العام معطى بالشكل:

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots.+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots..+\frac{1}{3^n}}$$

٧- اذا كانت $a > 0$ برهن أن المتتالسة $\{a_n\}$متقاربة من الصفر حيث $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$

٨- اذا كانت المتتاليات: $a_1 = \sqrt{a}\,, a_2 = \sqrt{a+a_1}\,, a_{n+1} = \sqrt{a+a_n}$

المطلوب: ١-أثبت أن $\{a_n\}$ متقاربة ٢- $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

٩-أثبت أن المتتالية متقاربة ثم استنتج تقارب المتتالية : $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ حيث أن:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}$$

أوجد النهايات باستخدام قواعد النهايات الشهيرة:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n} = 2$$

$$+0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} 2^{2+\frac{1}{n}} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4+\cdots\ldots\ldots\ldots.+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

اثبت تقارب المتتالية$\left\{\frac{1}{n}\right\}$بلغة ع متقاربة من الصفر.

لتكن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$متقاربة من الصفر فهي تحقق الشرط.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \ : n > N_\varepsilon \ \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

نجعل: $N_\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} : n > N_\varepsilon$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

اثبت تقارب المتتالية$\left\{\frac{n^2-n}{n^2+1}\right\}$بلغة εمتقاربة من الواحد.

لتكن المتتالية $\left\{\frac{n^2-n}{n^2+1}\right\}$ متقاربة من الواحد فهي تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \ : n > N_\varepsilon \ \Longrightarrow \left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| < \ \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{n^2 - n - n^2 - 1}{n^2 + 1}\right| = \left|\frac{-(n + 1)}{n^2 + 1}\right| = \frac{n + 1}{n^2 + 1}$$

$$\left|\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1\right| = \frac{n + 1}{n^2 + 1} < \frac{n + 1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

نجعل:

$$n > \frac{2}{\varepsilon} \Longleftarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftarrow \frac{2}{n} < \varepsilon$$

نختار $N_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}$ للتأكد منصحة اختيار $N_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}$:

نعوض : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon} : n > N_\varepsilon$

$$\left|\frac{n^2-n}{n^2+1}-1\right|<\frac{2}{\mathrm{n}}<\frac{2}{\mathrm{N}_\varepsilon}\leq\varepsilon$$

اذا" هي متقاربة من الواحد

-٢

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0 & 0\leq a<1\\ \frac{1}{2} & a=1\\ 1 & a>1\end{cases}$$

-٣

$$a_1=\frac{1}{1+3},a_2=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{2+3^2},a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)+3^{n+1}}$$

$$a_{n+1}\geq a_n\Longrightarrow a_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{3^n}$$

اذا "فهي متزايدة .

حسب المجموع الهندسي :

$$a_n<\frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

فهي متقاربة.

-٥

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<a_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq 1$$

فحسب مبرهنة الاحاطة : $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

-٦

$$a_n = \frac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{2}}{3}} = \frac{4}{3}$$

-٧

$$\{a_n\}: a_n \geq 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}{\left(2+\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}$$

$A = \dfrac{A}{2+A} \Longrightarrow A = -1$ مرفوض

$A = 0$ و هو المطلوب

٨- نلاحظ أن المتتالية متزايدة.

$$a_{n+1} > a_n \Longrightarrow a_n < \sqrt{a + a_n} \Longrightarrow a_n^2 < a + a_n$$
$$\Longrightarrow a_n^2 - a - a_n < 0$$

ندرس اشارة $a_n = x$

$$x^2 - x - a = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(_a) = 1 + 4a > 0$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$\Longrightarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

نلاحظ أن المتتالية محدودة من الاعلى فهي متقاربة.

انتهت المحاضرة

إعداد : سارة شهاب * مؤمنة أندورة

تنسيق : محمد أنس القزاز