المحاضرة (15) و (16)

الإثنين 5/11/2018

◀ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◀ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية ..

نظري ☑ عملي ☐

حل جملة معادلات فولتيرا التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

يفرض لدينا مجموعة من معادلات فولتيرا التكاملية مؤلفة من (n معادلة) بـ (n تابع مجهول) ولهذه المجموعة الشكل:

$$(1)\dots \quad \varphi_i(x) = h_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_0^x k_{ij}(x-t)\cdot\varphi_j(t)\,dt$$
$$i = 1,2,\dots,n$$

لإيجاد الحل المشترك $(\varphi_i(x) \; ; \; i=1,2,\dots,n)$ الذي يحقق المجموعة السابقة نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من مجموعة المعادلات (1) وبعدها نحصل على مجموعة من المعادلات الجبرية عددها (n معادلة) بـ (n مجهول)

$$(\phi_i(z) \; ; \; i=1,2,\dots,n)$$

حيث:

$$\phi_i(z) = L[\varphi_i(x)] \quad ; \quad i=1,2,\dots n$$

نقوم بحل المجموعة الجبرية الناتجة وبعد الحصول على الحل المشترك نأخذ تحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل المشترك للمجموعة (1)

سنقدم مجموعة من الأمثلة لتوضيح الفكرة السابقة:

مثال (1) أوجد الحل المشترك لجملة معادلات فولتيرا التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\varphi_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\,\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt$$

$$\varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من المعادلات التكاملية المعروضة نجد أنّ:

$$L[\psi_1(x)] = L\left[1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\psi_1(t).dt + \int_0^x \psi_2(t).dt\right]$$

$$L[\psi_2(x)] = L\left[4x - \int_0^x \psi_1(t).dt + 4\int_0^x (x-t)\,\psi_2(t).dt\right]$$

بالاستفادة من خاصية الخطية في تحويلات لابلاس نجد أنّ:

$$(*)\begin{cases} L[\psi_1(x)] = L[1] - 2L\left[\int_0^x e^{2(x-t)}\psi_1(t).dt\right] + L\left[\int_0^x \psi_2(t).dt\right] \\ L[\psi_2(x)] = 4L[x] - L\left[\int_0^x \psi_1(t).dt\right] + 4L\left[\int_0^x (x-t)\,\psi_2(t).dt\right] \end{cases}$$

نفرض أنّ:

$$L[\psi_1(x)] = \Psi_1(z) \qquad L[\psi_2(x)] = \Psi_2(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[1] = \frac{1}{z} \quad ; \quad L[x] = \frac{1}{z^2} \quad , \quad L[e^{2x}] = \frac{1}{z-2}$$

$$L\left[\int_0^x e^{2(x-t)}\psi_1(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[e^{2x}].L[\psi_1(t)] = \frac{1}{z-2}\Psi_1(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x \psi_2(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1].L[\psi_2(t)] = \frac{1}{z}\Psi_2(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x \psi_1(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1].L[\psi_1(t)] = \frac{1}{z}\Psi_1(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x (x-t)\,\psi_2(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[x].L[\psi_2(t)] = \frac{1}{z^2}\Psi_2(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

نعوض ما سبق في الجملة (*) فنجد أن المعادلة الأولى من هذه الجملة أصبحت بالشكل:

$$\Psi_1(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z-2}\Psi_1(Z) + \frac{1}{Z}\Psi_2(Z)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Z}{Z-2}\right)\Psi_1(Z) - \frac{1}{Z}\Psi_2(Z) = \frac{1}{Z} \quad \ldots (1)$$

ونجد أن المعادلة الثانية من الجملة (*) أصبحت بالشكل:

$$\Psi_2(Z) = \frac{4}{Z^2} - \frac{1}{Z}\Psi_1(Z) + \frac{4}{Z^2}\Psi_2(Z)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{Z}\Psi_1(Z)} + \left(\frac{Z^2-4}{Z^2}\right)\Psi_2(Z) = \frac{4}{Z^2} \quad \ldots (2)$$

وبالتالي أننا تحولت لإيجاد الحل باشتراك لجملة المعادلات (1) و (2)

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\left(-\frac{Z-2}{Z^2}\right)$ فنجد:

$$-\cancel{\frac{1}{Z}\Psi_1(Z)} + \frac{Z-2}{Z^3}\Psi_2(Z) = -\frac{Z-2}{Z^3} \quad \ldots (3)$$

نجمع المعادلة (2) مع المعادلة (3) طرفاً لطرف فنجد أن:

$$\left(\frac{Z^3-3Z-2}{Z^3}\right)\Psi_2(Z) = \frac{3Z+2}{Z^3}$$

$$\Rightarrow \Psi_2(Z) = \frac{3Z+2}{Z^3-3Z-2}$$

نعوض $\Psi_2(Z)$ في المعادلة (1) فنحصل على:

$$\left(\frac{Z}{Z-2}\right)\Psi_1(Z) - \frac{1}{Z}\left(\frac{3Z+2}{Z^3-3Z-2}\right) = \frac{1}{Z}$$

$$\left(\frac{Z}{Z-2}\right)\Psi_1(Z) = \frac{1}{Z} + \left(\frac{3Z+2}{Z^3-3Z-2}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)$$

$$\frac{z}{z-2}\,\bar{\psi}_1(z) = \frac{z^3 \cancel{-3z} \cancel{-2} \cancel{+3z} \cancel{+2}}{z(z^3-3z-2)}$$

$$\frac{z}{z-2}\,\bar{\psi}_1(z) = \frac{z^3}{z(z^3-3z-2)}$$

$$\bar{\psi}_1(z) = \frac{(z-2)\,z}{(z-2)(z+1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2}$$

وبالتالي حصلنا على الحل المشترك التالي:

$$\bar{\psi}_1(z) = \frac{z}{(z+1)^2} \quad , \quad \bar{\psi}_2(z) = \frac{3z+2}{(z-2)(z+1)^2}$$

الآن بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\psi_1(x) = L^{-1}[\bar{\psi}_1(z)] = L^{-1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right]$$

لكن:

$$\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2}$$

نوحد المقامات ونطابق:

$$\Rightarrow z = A(z+1) + B$$

$$z = Az + A + B$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ A + B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1 \quad B = -1$$

ومنه:

$$\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

من خاصية الخطية:

$$\psi_1(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{Z+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(Z+1)^2}\right]$$

نعلم أنه:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z+1}\right] = e^{-x}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(Z+1)^2}\right] = xe^{-x}$$

وذلك لأنه: من خاصية الضرب بـ t^n:

نعلم أنه:

$$L\left[t^n g(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{dZ^n} G(Z)$$

$$n=1 \rightarrow L\left[xe^{-x}\right] = (-1)\frac{d}{dZ}\left[\frac{1}{Z+1}\right] = \frac{1}{(Z+1)^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(Z+1)^2}\right] = xe^{-x}$$

ومنه:

$$\psi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$\psi_2(x) = L^{-1}\left[\Psi_2(Z)\right] = L^{-1}\left[\frac{3Z+2}{(Z-2)(Z+1)^2}\right]$$

بتفريق الكسر نجد:

$$\frac{3Z+2}{(Z-2)(Z+1)^2} = \frac{A}{Z-2} + \frac{B}{Z+1} + \frac{C}{(Z+1)^2}$$

$$\Rightarrow 3Z+2 = A(Z+1)^2 + B(Z+1)(Z-2) + C(Z-2)$$

$$3Z+2 = A(Z^2+2Z+1) + B(Z^2-Z-2) + C(Z-2)$$

$$\Rightarrow 3Z+2 = (A+B)Z^2 + (2A-B+C)Z + (A-2B-2C)$$

بالمطابقة :

$$\left.\begin{array}{ll} A+B=0 & (1) \\ 2A-B+C=3 & (2) \\ A-2B-2C=2 & (3) \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{8}{9} \ , \ B=-\frac{8}{9} \ , \ C=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x)=L^{-1}\left[\frac{3Z+2}{(Z-2)(Z+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{\frac{8}{9}}{Z-2}+\frac{-\frac{8}{9}}{Z+1}+\frac{\frac{1}{3}}{(Z+1)^2}\right]$$

من خاصية الخطية :

$$\psi_2(x)=\frac{8}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{Z-2}\right]-\frac{8}{9}L^{-1}\left[\frac{1}{Z+1}\right]+\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(Z+1)^2}\right]$$

$$=\frac{8}{9}e^{2x}-\frac{8}{9}e^{-x}+\frac{1}{3}xe^{-x}$$

وبالتالي الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية المفروضة هو :

$$\psi_1(x)=(1-x)e^{-x}$$

$$\psi_2(x)=\frac{8}{9}e^{2x}-\frac{8}{9}e^{-x}+\frac{1}{3}xe^{-x}$$

تمرين : استخدم تحويلات لابلاس في إيجاد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية التالية :

$$\psi_1(x)=1-\int_0^x \psi_2(t).dt$$

$$\psi_2(x)=\cos x-1+\int_0^x \psi_3(t).dt$$

$$\psi_3(x)=\cos x+\int_0^x \psi_1(t).dt$$

الحل : بأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من معادلات الجملة التكاملية المفروضة نجد أنّ :

$$L[\psi_1(x)] = L\left[1 - \int_0^x \psi_2(t)\,dt\right]$$

$$L[\psi_2(x)] = L\left[\cos x - 1 + \int_0^x \psi_3(t)\,dt\right]$$

$$L[\psi_3(x)] = L\left[\cos x + \int_0^x \psi_1(t)\,dt\right]$$

بالاستفادة من خاصية الخطية في تحويلات لابلاس نجد أنّ :

$$(*)\begin{cases} L[\psi_1(x)] = L[1] - L\left[\int_0^x \psi_2(t).dt\right] \\ L[\psi_2(x)] = L[\cos x] - L[1] + L\left[\int_0^x \psi_3(t).dt\right] \\ L[\psi_3(x)] = L[\cos x] + L\left[\int_0^x \psi_1(t).dt\right] \end{cases}$$

نفرض أنّ :

$$L[\psi_1(x)] = \Psi_1(Z)$$

$$L[\psi_2(x)] = \Psi_2(Z)$$

$$L[\psi_3(x)] = \Psi_3(Z)$$

ونعلم أنّ :

$$L[1] = \frac{1}{Z} \quad , \quad L[\cos x] = \frac{Z}{Z^2+1}$$

$$L\left[\int_0^x \psi_1(t).dt\right] \underset{\text{من مبرهنة الالتفاف}}{=} L[1].L[\psi_1(t)] = \frac{1}{Z}.\Psi_1(Z)$$

$$L\left[\int_0^x \psi_2(t)\,dt\right] = L[1]\cdot L[\psi_2(t)] = \frac{1}{Z}\,\Psi_2(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x \psi_3(t)\,dt\right] = L[1]\cdot L[\psi_3(t)] = \frac{1}{Z}\,\Psi_3(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

نعوض ما سبق في جملة المعادلات (*) فنجد المعادلة الأولى تصبح بالشكل:

$$\Psi_1(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z}\Psi_2(Z) \Rightarrow \boxed{\Psi_1(Z) + \frac{1}{Z}\Psi_2(Z) = \frac{1}{Z}} \quad (1)$$

ونجد أن المعادلة الثانية أصبحت بالشكل:

$$\Psi_2(Z) = \frac{Z}{Z^2+1} - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z}\Psi_3(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_2(Z) - \frac{1}{Z}\Psi_3(Z) = \frac{Z}{Z^2+1} - \frac{1}{Z}} \quad \ldots (2)$$

ونجد أن المعادلة الثالثة أصبحت بالشكل:

$$\Psi_3(Z) = \frac{Z}{Z^2+1} + \frac{1}{Z}\Psi_1(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{Z}\Psi_1(Z) - \Psi_3(Z) = -\frac{Z}{Z^2+1}} \quad \ldots (3)$$

وبالتالي المسألة تحولت لإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلات (1) و (2) و (3):

نضرب طرفي (3) بـ $\left(-\frac{1}{Z}\right)$ ونجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة الأخيرة فنجد:

$$\left(\frac{1}{Z^3}+1\right)\Psi_2(Z) = \frac{1}{Z^3} + \frac{Z+1}{Z^2+1} - \frac{1}{Z}$$

$$\left(\frac{1+Z^3}{Z^3}\right)\Psi_2(Z) = \frac{Z^2+1+Z^4+Z^3-Z^4-Z^2}{Z^3(Z^2+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_2(Z) = \frac{1}{Z^2+1}}$$

نعوض ما حصلنا عليه في المعادلة (1) فنجد:

$$\Psi_1(Z) + \frac{1}{Z}\left(\frac{1}{Z^2+1}\right) = \frac{1}{Z}$$

$$\Psi_1(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z(Z^2+1)} = \frac{Z^2+1-1}{Z(Z^2+1)} = \frac{Z}{Z^2+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_1(Z) = \frac{Z}{Z^2+1}}$$

نعوض ما حصلنا عليه في المعادلة (3) فنحصل على:

$$\frac{1}{Z}\Psi_1(Z) - \Psi_3(Z) = -\frac{Z}{Z^2+1}$$

$$\frac{1}{Z}\left(\frac{Z}{Z^2+1}\right) - \Psi_3(Z) = -\frac{Z}{Z^2+1}$$

$$\Psi_3(Z) = \frac{1}{Z^2+1} + \frac{Z}{Z^2+1} = \frac{1+Z}{Z^2+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_3(Z) = \frac{Z+1}{Z^2+1}}$$

وبالتالي حصلنا على الحل المشترك التالي:

$$\Psi_1(Z) = \frac{Z}{Z^2+1}, \quad \Psi_2(Z) = \frac{1}{Z^2+1}, \quad \Psi_3(Z) = \frac{Z+1}{Z^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\boxed{\psi_1(x) = \cos x}, \quad \boxed{\psi_2(x) = \sin x}, \quad \boxed{\psi_3(x) = \cos x + \sin x}$$

تمرين: استخدم تحويلات لابلاس في إيجاد حل جملة المعادلات التكاملية التالية:

$$y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(t)\,dt$$

$$y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t).dt$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين كل معادلة من المعادلات التكاملية في الجملة السابقة نجد:

$$L[y_1(x)] = L\left[-1 + \int_0^x y_2(t).dt\right]$$

$$L[y_2(x)] = L\left[x - \int_0^x y_1(t).dt\right]$$

بالاستفادة من خاصية الخطية في تحويلات لابلاس نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} L[y_1(x)] &= -L[1] + L\left[\int_0^x y_2(t).dt\right] \\ L[y_2(x)] &= L[x] - L\left[\int_0^x y_1(t).dt\right] \end{aligned}\right\} \ldots(*)$$

نفرض:

$$L[y_1(x)] = Y_1(Z) \quad , \quad L[y_2(x)] = Y_2(Z)$$

ونعلم أن:

$$L[1] = \frac{1}{Z} \quad , \quad L[x] = \frac{1}{Z^2}$$

$$L\left[\int_0^x y_1(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1].L[y_1(t)] = \frac{1}{Z} Y_1(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x y_2(t).dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1].L[y_2(t)] = \frac{1}{Z} Y_2(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

نعوض ما سبق في الجملة * نجد أن المعادلة الأولى تصبح بالشكل:

$$Y_1(Z) = -\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} Y_2(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_1(Z) - \frac{1}{Z} Y_2(Z) = -\frac{1}{Z}} \quad \dots (1)$$

ونجد أن المعادلة الثانية من * تصبح بالشكل:

$$Y_2(Z) = \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Z} Y_1(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{Z} Y_1(Z) + Y_2(Z) = \frac{1}{Z^2}} \quad \dots (2)$$

وبالتالي المسألة تحولت لإيجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين (2) و (1):

نضرب طرفي (1) بـ $\left(-\frac{1}{Z}\right)$ ونجمع المعادلة الناتجة طرفاً لطرف للمعادلة (2) فنجد:

$$\left(\frac{1}{Z^2} + 1\right) Y_2(Z) = \frac{2}{Z^2} \Rightarrow \left(\frac{1+Z^2}{Z^2}\right) Y_2(Z) = \frac{2}{Z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_2(Z) = \frac{2}{1+Z^2}}$$

نعوض ما حصلنا عليه في المعادلة (1) فنحصل على:

$$Y_1(Z) = \frac{1}{Z}\left(\frac{2}{1+Z^2}\right) - \frac{1}{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_1(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2Z}{Z^2+1}}$$

بالتالي حصلنا على الحل المشترك التالي:

$$Y_1(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2Z}{Z^2+1} \quad , \quad Y_2(Z) = \frac{2}{Z^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$y_1(x) = L^{-1}[Y_1(Z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Z} - \frac{2Z}{Z^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] - 2L\left[\frac{Z}{Z^2+1}\right]$$

$$y_1(x) = 1 - 2\cos x$$

$$y_2(x) = L^{-1}[Y_2(Z)] = L^{-1}\left[\frac{2}{Z^2+1}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2+1}\right]$$

$$y_2(x) = 2\sin x$$

وبالتالي الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية المفروضة:

$$\Rightarrow y_1(x) = 1 - 2\cos x \quad , \quad y_2(x) = 2\sin x$$

وهو المطلوب.

تمرين: استخدم تحويلات لابلاس في إيجاد حل جملة المعادلات التكاملية الآتية:

$$y_1(x) = -x + \int_0^x y_2(t).dt$$

$$y_2(x) = -3x^2 + x - 5\int_0^x y_1(t).dt + 2\int_0^x y_2(t).dt$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من المعادلات التكاملية السابقة نجد:

$$L[y_1(x)] = L\left[-x + \int_0^x y_2(t)\,dt\right]$$

$$L[y_2(x)] = L\left[-3x^2 + x - 5\int_0^x y_1(t).dt + 2\int_0^x y_2(t).dt\right]$$

بالاستفادة من الخاصية الخطية في تحويلات لابلاس نجد:

$$* \begin{cases} L[y_1(x)] = -L[x] + L\left[\int_0^x y_2(t).dt\right] \\ L[y_2(x)] = -3L[x^2] + L[x] - 5L\left[\int_0^x y_1(t).dt\right] + 2L\left[\int_0^x y_2(t).dt\right] \end{cases}$$

نفرض أن:

$$L[y_1(x)] = Y_1(Z) \qquad L[y_2(x)] = Y_2(Z)$$

ونعلم أن:

$$L[x] = \frac{1}{Z^2} \qquad L[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{Z^{n+1}} \; ; n \geq 0$$

$$\Rightarrow L[x^2] = \frac{\Gamma(2+1)}{z^3} = \frac{\Gamma(3)}{z^3} = \frac{2!}{z^3} = \frac{2}{z^3}$$

$$L\left[\int_0^x y_2(t)\,dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1]\cdot L[y_2(t)] = \frac{1}{z}\, Y_2(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x y_1(t)\,dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[1]\cdot L[y_1(t)] = \frac{1}{z}\, Y_1(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

نعوض ما سبق في جملة المعادلات فنجد:

$$Y_1(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} Y_2(z)$$

$$Y_2(z) = -3\left(\frac{2}{z^3}\right) + \frac{1}{z} - 5\,\frac{1}{z} Y_1(z) + 2\,\frac{1}{z} Y_2(z)$$

ومنه:

$$\Rightarrow \boxed{Y_1(z) - \frac{1}{z} Y_2(z) = -\frac{1}{z^2}} \quad \dots(1)$$

$$Y_2(z) = -\frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{z} Y_1(z) + \frac{2}{z} Y_2(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{5}{z} Y_1(z) + \left(\frac{z-2}{z}\right) Y_2(z) = -\frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}} \quad \dots(2)$$

وبالتالي المسألة تحولت إلى إيجاد الحل المشترك لجملة المعادلات (1) و (2) :

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\left(\frac{-5}{z}\right)$ ونجمع المعادلة الناتجة طرفاً لطرف للمعادلة (2)

فنجد:

$$\left(\frac{5}{z^2} + \frac{z-2}{z}\right) Y_2(z) = \frac{5}{z^3} - \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}$$

$$\frac{z^2-2z+5}{z^2}\, Y_2(z) = \frac{-1+z}{z^3}$$

$$\boxed{Y_2(z) = \frac{z-1}{z(z^2-2z+5)}}$$

نعوض ما حصلنا عليه في (1) فنجد :

$$Y_1(Z) - \frac{Z-1}{Z^2(Z^2-2Z+5)} = -\frac{1}{Z^2}$$

$$\Rightarrow Y_1(Z) = -\frac{1}{Z^2} + \frac{Z-1}{Z^2(Z^2-2Z+5)}$$

$$= \frac{-Z^2+2Z-5+Z-1}{Z^2(Z^2-2Z+5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_1(Z) = \frac{-Z^2+3Z-6}{Z^2(Z^2-2Z+5)}}$$

وبالتالي حصلنا على الحل المشترك التالي :

$$Y_1(Z) = \frac{-Z^2+3Z-6}{Z^2(Z^2-2Z+5)} \quad , \quad Y_2(Z) = \frac{Z-1}{Z(Z^2-2Z+5)}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد :

$$y_1(x) = L^{-1}[Y_1(Z)] = L^{-1}\left[\frac{-Z^2+3Z-6}{Z^2(Z^2-2Z+5)}\right]$$

بتفريق الكسر الأخير :

$$\frac{-Z^2+3Z-6}{Z^2(Z^2-2Z+5)} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z^2} + \frac{CZ+D}{Z^2-2Z+5}$$

$$-Z^2+3Z-6 = A(Z(Z^2-2Z+5)) + B(Z^2-2Z+5) + (CZ+D)(Z^2)$$

$$-Z^2+3Z-6 = AZ^3-2AZ^2+5AZ+BZ^2-2BZ+5B+CZ^3+DZ^2$$

$$-Z^2+3Z-6 = (A+C)Z^3+(-2A+B+D)Z^2+(5A-2B)Z+5B$$

بالمطابقة نجد :

$$A+C=0$$

$$-2A+B+D=-1$$

$$5A-2B=3$$

$$5B=-6$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد:

$$A = \frac{3}{25} \quad , \quad B = -\frac{6}{5} \quad , \quad C = -\frac{3}{25} \quad , \quad D = \frac{11}{25}$$

ومنه:

$$y_1(x) = L^{-1}\left[\frac{\frac{3}{25}}{Z} + \frac{-\frac{6}{5}}{Z^2} + \frac{-\frac{3}{25}Z + \frac{11}{25}}{Z^2 - 2Z + 5}\right]$$

من خاصية الخطية:

$$y_1(x) = \frac{3}{25} L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] - \frac{6}{5} L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}\right] - \frac{3}{25} L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2 - 2Z + 5}\right] + \frac{11}{5}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2 - 2Z + 5}\right]$$

ولكن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] = 1 \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}\right] = x$$

ولدينا:

$$L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2 - 2Z + 5}\right] = L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2 - 2Z + 1 + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{Z}{(Z-1)^2 + 4}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{Z - 1 + 1}{(Z-1)^2 + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{Z - 1}{(Z-1)^2 + 4}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(Z-1)^2 + 4}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{Z - 1}{(Z-1)^2 + 4}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{2}{(Z-1)^2 + 4}\right]$$

$$= e^{x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{x} \sin 2x$$

من خاصية الإزاحة الأولى

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2 - 2Z + 5}\right] = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{2}{(Z-1)^2 + 4}\right] = \frac{1}{2} e^{x} \sin 2x$$

وبالتالي بالتعويض في عبارة $y_1(x)$ نجد:

$$y_1(x) = \frac{3}{25} - \frac{6}{5}x - \frac{3}{25}\left(e^x \cos 2x + \frac{1}{2} e^x \sin 2x\right) + \frac{11}{50} e^x \sin 2x$$

$$y_1(x) = \frac{3}{25} - \frac{6}{5}x - \frac{3}{25} e^x \cos 2x + \frac{4}{25} e^x \sin 2x$$

$$\boxed{y_1(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5} - 6x - \frac{3}{5} e^x \cos 2x + \frac{4}{5} e^x \sin 2x\right)}$$

$$y_2(x) = L^{-1}[Y_2(Z)] = L^{-1}\left[\frac{Z-1}{Z(Z^2-2Z+5)}\right]$$

بتفريق الكسر الأخير نجد أنّ:

$$\frac{Z-1}{Z(Z^2-2Z+5)} = \frac{A}{Z} + \frac{BZ+C}{Z^2-2Z+5}$$

$$Z-1 = A(Z^2-2Z+5) + Z(BZ+C)$$

$$Z-1 = AZ^2 - 2AZ + 5A + BZ^2 + CZ$$

$$Z-1 = (A+B)Z^2 + (-2A+C)Z + 5A$$

بالمطابقة نجد:

$$A+B=0$$

$$-2A+C=1$$

$$5A=-1$$

بالحل المشترك نجد أنّ:

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{3}{5}$$

ومنه:

$$y_2(x) = L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{5}}{Z} + \frac{\frac{1}{5}Z + \frac{3}{5}}{Z^2-2Z+5}\right]$$

$$= -\frac{1}{5} L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] + \frac{1}{5} L^{-1}\left[\frac{Z-1+4}{Z^2-2Z+5}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+4}\right]+\frac{2}{5}L^{-1}\left[\frac{2}{(z-1)^2+4}\right]$$

لكن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]=1$$

$$L^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+4}\right]=e^{x}\cos 2x$$

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(z-1)^2+4}\right]=e^{x}\sin 2x$$

ومنه:

$$y_2(x)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}e^{x}\cos 2x+\frac{2}{5}e^{x}\sin 2x$$

ومنه الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية المفروضة:

$$y_1(x)=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}-6x-\frac{3}{5}e^{x}\cos 2x+\frac{4}{5}e^{x}\sin 2x\right)$$

$$y_2(x)=\frac{1}{5}\left(e^{x}\cos 2x+2e^{x}\sin 2x-1\right)$$

تمرين: استخدم تحويلات لابلاس في إيجاد حل جملة المعادلات التكاملية التالية:

$$y_1(x)=x+\int_0^x y_2(t)\,dt$$

$$y_2(x)=\frac{x^3}{6}+2x-1-\int_0^x (x-t)\,y_1(t)\,dt$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من معادلات الجملة السابقة:

$$L[y_1(x)]=L\left[x+\int_0^x y_2(t)\,dt\right]$$

$$L[y_2(x)]=L\left[\frac{x^3}{6}+2x-1-\int_0^x (x-t)\,y_1(t)\,dt\right]$$

من خاصية الخطية في تحويلات لابلاس نجد :

$$(*)\begin{cases} L[y_1(x)] = L[x] + L[\int_0^x y_2(t).dt] \\ L[y_2(x)] = \frac{1}{6} L[x^3] + 2L[x] - L[1] - L[\int_0^x (x-t)\,y_1(t).dt] \end{cases}$$

نفرض أنّ :

$$L[y_1(x)] = L[y_1(t)] = Y_1(z)$$

$$L[y_2(x)] = L[y_2(t)] = Y_2(z)$$

ونعلم أنّ :

$$L[1] = \frac{1}{z} \quad , \quad L[x] = \frac{1}{z^2} \quad , \quad L[x^3] = \frac{\Gamma(4)}{z^4} = \frac{3!}{z^4} = \frac{6}{z^4}$$

$$[\int_0^x (x-t)\,y_1(t).dt] = L[x] . L[y_1(t)] = \frac{1}{z^2} Y_1(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$[\int_0^x y_2(t).dt] = L[1] . L[y_2(t)] = \frac{1}{z} Y_2(z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

نعوض ما سبق في جملة المعادلات (*) فنجد :

$$Y_1(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} Y_2(z)$$

$$\Rightarrow \quad Y_1(z) - \frac{1}{z} Y_2(z) = \frac{1}{z^2} \quad \dots(1)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} Y_1(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z^2} Y_1(z) + Y_2(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} \quad \dots(2)$$

وبالتالي المسألة تحولت إلى إيجاد حل المشترك لجملة المعادلتين (٢) و (١) :

نضرب طرفي المعادلة (٢) بـ $\left(\frac{1}{z}\right)$ ونجمع المعادلة الناتجة طرفاً إلى طرف مع المعادلة (١) فنجد :

$$\left(\frac{1}{z^3}+1\right)Y_1(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}+\frac{2}{z^3}-\frac{1}{z^2}$$

$$\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right)Y_1(z)=\frac{z^3+1+2z^2-z^3}{z^5}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right)Y_1(z)=\frac{2z^2+1}{z}$$

$$Y_1(z)=\frac{2z^2+1}{z^2(z^3+1)}=\frac{2z^2+1}{z^2(z+1)(z^2-z+1)}$$

$$Y_1(z)=\frac{2z^2+1}{z^2(z+1)(z^2-z+1)}$$

بتفريق الكسر الأخير :

$$\frac{2z^2+1}{z^2(z+1)(z^2-z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z+1}+\frac{Dz+E}{z^2-z+1}$$

$$2z^2+1=A.z(z+1)(z^2-z+1)+B(z+1)(z^2-z+1)+Cz^2(z^2-z+1)+(Dz+E)(z^2(z+1))$$

$$\Rightarrow 2z^2+1=(A+C+D)z^4+(B-C+D+E)z^3+(C+E)z^2+Az+B$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases}A+C+D=0\\ B-C+D+E=0\\ C+E=2\\ A=0\quad ,B=1\end{cases}$$

بالحل المشترك نجد:

$A=0 \quad , B=1 \quad , C=1 \quad , D=-1 \quad , E=1$

ومنه:

$$Y_1(Z)=\frac{2Z^2+1}{Z^2(Z+1)(Z^2-Z+1)}=\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z+1}+\frac{1-Z}{Z^2-Z+1}$$

$$\Rightarrow Y_1(Z)=\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z+1}+\frac{1-Z}{Z^2-Z+1}$$

نعوض ما حصلنا عليه في (1) فنجد:

$$\frac{2Z^2+1}{Z^2(Z+1)(Z^2-Z+1)}-\frac{1}{Z}Y_2(Z)=\frac{1}{Z^2}$$

وبالتالي:

$$y_1(x)=x+e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y_2(x)=L^{-1}[Y_2(Z)]=L^{-1}\left[-\frac{1}{Z+1}+\frac{1}{Z^2-Z+1}\right]$$

من خاصية الخطية:

$$y_2(x)=-L^{-1}\left[\frac{1}{Z+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2-Z+1}\right]$$

لكن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z+1}\right]=e^{-x}$$

ولدينا:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2-Z+1}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(Z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

ومنه:

$$y_2(x)=-e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

وبالتالي الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية المفروضة هو:

$$y_1(x) = x + e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - e^{\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y_2(x) = -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}x} . \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

وبذلك يتم المطلوب...

تمرين: استخدم تحويلات لابلاس في إيجاد حل جملة المعادلات التكاملية الخطية:

$$y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t).dt$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t).dt$$

$$y_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\, y_1(t).dt$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من معادلات الجملة المفروضة نجد:

$$L[y_1(x)] = L[x + \int_0^x y_2(t).dt]$$

$$L[y_2(x)] = L[1 - \int_0^x y_1(t).dt]$$

$$L[y_3(x)] = L[\sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\, y_1(t).dt]$$

بالاستفادة من الخاصة الخطية:

$$\left.\begin{aligned} L[y_1(x)] &= L[x] + L[\int_0^x y_2(t).dt] \\ L[y_2(x)] &= L[1] - L[\int_0^x y_1(t).dt] \\ L[y_3(x)] &= L[\sin x] + \frac{1}{2} L[\int_0^x (x-t)\, y_1(t).dt] \end{aligned}\right\} \ldots (*)$$

بفرض أنّ :

$$L[y_1(x)] = L[y_1(t)] = Y_1(Z)$$

$$L[y_2(x)] = L[y_2(t)] = Y_2(Z)$$

$$L[y_3(x)] = L[y_3(t)] = Y_3(Z)$$

ولدينا :

$$L[x] = \frac{1}{Z^2} \quad , \quad L[1] = \frac{1}{Z} \quad , \quad L[\sin x] = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$L\left[\int_0^x y_1(t).dt\right] = L[1].L[y_1(t)] = \frac{1}{Z} Y_1(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x y_2(t).dt\right] = L[1].L[y_2(t)] = \frac{1}{Z} Y_2(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L\left[\int_0^x (x-t)\, y_1(t).dt\right] = L[x].L[y_1(t)] = \frac{1}{Z^2} Y_1(Z)$$

نعوض ما سبق في جملة المعادلات (*) فنجد :

$$Y_1(Z) = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z} . Y_2(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_1(Z) - \frac{1}{Z} Y_2(Z) = \frac{1}{Z^2}} \quad ...(1)$$

$$Y_2(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z} Y_1(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{Z} Y_1(Z) + Y_2(Z) = \frac{1}{Z}} \quad ...(2)$$

$$Y_3(Z) = \frac{1}{Z^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{Z^2}\,Y_1(Z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2Z^2}Y_1(Z) - Y_3(Z) = -\frac{1}{Z^2+1}} \quad \ldots(3)$$

وبالتالي فإن المطلوب إيجاد الحل المشترك لجملة المعادلات (3)، (2)، (1) التالية:

$$Y_1(Z) - \frac{1}{Z}Y_2(Z) = \frac{1}{Z^2} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{1}{Z}Y_1(Z) + Y_2(Z) = \frac{1}{Z} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{1}{2Z^2}Y_1(Z) - Y_3(Z) = -\frac{1}{Z^2+1} \quad \ldots(3)$$

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\left(-\frac{1}{Z}\right)$ ونجمع (2) طرفاً لطرف نجد:

$$\left(\frac{1}{Z^2}+1\right)Y_2(Z) = -\frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z}$$

$$\left(\frac{1+Z^2}{Z^2}\right)Y_2(Z) = \frac{-1+Z^2}{Z^3}$$

$$\Rightarrow Y_2(Z) = \frac{Z^2-1}{Z(1+Z^2)}$$

بتعويض ما حصلنا عليه في (1) نجد:

$$Y_1(Z) - \frac{1}{Z}\left(\frac{Z^2-1}{Z(1+Z^2)}\right) = \frac{1}{Z^2}$$

$$Y_1(Z) = \frac{1}{Z^2} + \frac{Z^2-1}{Z^2(1+Z^2)} = \frac{1+Z^2+Z^2-1}{Z^2(1+Z^2)} = \frac{2Z^2}{Z^2(1+Z^2)} = \frac{2}{Z^2+1}$$

$$\rightarrow Y_1(Z) = \frac{2}{Z^2+1}$$

بتعويض ما حصلنا عليه في (3) نجد أن:

$$\frac{1}{2Z^2}\left(\frac{2}{Z^2+1}\right) - Y_3(Z) = -\frac{1}{Z^2+1}$$

$$\frac{1}{Z^2(Z^2+1)} - Y_3(Z) = -\frac{1}{Z^2+1}$$

$$Y_3(Z) = \frac{1}{Z^2(Z^2+1)} + \frac{1}{Z^2+1}$$

$$= \frac{1+Z^2}{Z^2(Z^2+1)} = \frac{1}{Z^2}$$

$$\Rightarrow Y_3(Z) = \frac{1}{Z^2}$$

وبالتالي نجد الحل المشترك:

$$Y_1(Z) = \frac{2}{Z^2+1} \quad , \quad Y_2(Z) = \frac{Z^2-1}{Z(1+Z^2)} \quad , \quad Y_3(Z) = \frac{1}{Z^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$y_1(x) = L^{-1}[Y_1(Z)] = L^{-1}\left[\frac{2}{Z^2+1}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2+1}\right] = 2\sin x$$

$$\Rightarrow y_1(x) = 2\sin x$$

$$y_2(x) = L^{-1}[Y_2(Z)] = L^{-1}\left[\frac{Z^2-1}{Z(1+Z^2)}\right]$$

بتفريق الكسر الأخير نجد:

$$\frac{Z^2-1}{Z(1+Z^2)} = \frac{A}{Z} + \frac{BZ+C}{Z^2+1}$$

$$\Rightarrow Z^2-1 = A(Z^2+1) + (BZ+C)(Z)$$

$$Z^2 - 1 = (A+B)Z^2 + CZ + A$$

بالمطابقة نجد :

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ C=0 \\ A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1 \ , \ B=2 \ , \ C=0$$

بالحل المشترك

ومنه :

$$y_2(x) = L^{-1}\left[\frac{-1}{Z} + \frac{2Z}{Z^2+1}\right] = -L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2+1}\right]$$

$$= -1 + 2\cos x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = -1 + 2\cos x$$

$$y_3(x) = L^{-1}[Y_3(Z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}\right] = x$$

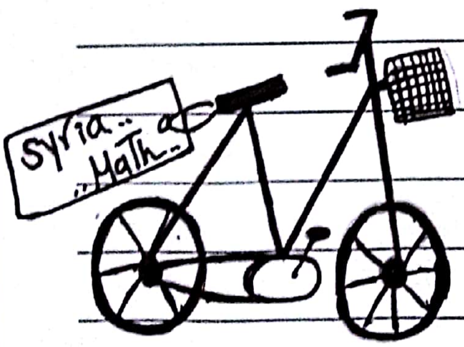
$$\Rightarrow y_3(x) = x$$

ومنه الحل المشترك للمعادلة المفروضة هو :

$$y_1(x) = 2\sin x \ , \ y_2(x) = -1 + 2\cos x \ , \ y_3(x) = x$$

انتهت المحاضرة... ♡

إعداد : إيناس دليل



" اللهم مستقبلاً أعظم مما همت
وحياة ألطف مما أردت اللهم توفيقاً
ورضاً وحباً وخيراً .. "

"♥...♥"