9

◄ دكتور المادة: د. محمد بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة:

نظري ☑
عملي ☐

تذكرة :

(X,τ) فضاء تبولوجيا و f مرشحة

f متقاربة $\Longleftrightarrow$ $\exists x\in X : \mathcal{V}_x \subseteq f$

ملاحظة :

إذا كانت $X\neq\phi$ و f مرشحة في X عندئذٍ

$\tau_f = f\cup\{\phi\}$

تكون تبولوجيا على X

لكن العكس غير صحيح بالضرورة أي أنه إذا كانت τ تبولوجيا على X فإن $\tau-\{\phi\}$ ليست مرشحة بالضرورة.

■ قاعدة مرشحة : لتكن $X\neq\phi$ و $\beta\neq\phi$ ، إن β تصلح أن تكون قاعدة لمرشحة إذا تحقق ما يلي :

1) $\phi\notin\beta$

2) $B_1,B_2\in\beta\ ;\ \exists B_3\in\beta : B_3\subseteq B_1\cap B_2$

وعندئذٍ تكون المرشحة المولدة بهذه القاعدة

$f_\beta=\{U\subseteq X : \exists B\in\beta : B\subseteq U\}$

تعريف : لتكن f مرشحة و $\beta\neq\phi$ ، إن β قاعدة لـ f $\Longleftrightarrow$

1) $\beta\subseteq f$

2) $\forall A\in f\ ;\ \exists B\in\beta : B\subseteq A$

مثال: $X \neq \phi$ ، $x \in X$ إن $f_x = \{U \subseteq X ; \{x\} \subseteq U\}$ مرشحة

مثال: لتكن $(x_n)_{n\in N}$ متتالية ولتكن
$$E_{n_0} = \{x_n : n \geq n_0\}$$
أي
$$E_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$$
$$E_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}$$
$$E_3 = \{x_3, x_4, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$E_{n_0} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$$
ثم لنعرف الجماعة $\beta_n = \{E_n ; n \in IN\}$
أي $\beta_n = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$
إن β قاعدة لمرشحة وأن
$$f_\beta = \{U \subseteq X , \exists E_n \in \beta : E_n \subseteq U\}$$

المرشحة الأعظمية:

ليكن $X = \{1,2,3\}$ إن $\{X\}$ مرشحة
ولنبحث عن مرشحات أعظم «أكبر منها»
$$\{\{1,2\}, X\} \ , \ \{\{1,2\}, X\} \ , \ \{\{2,3\}, X\}$$
$$f_1 \qquad f_2 \qquad f_3$$
لنبحث أيضاً عن مرشحات أعظم من كل من f_1, f_2, f_3
$$f_{11} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\} \supseteq f_1$$
$$f_{22} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\} \supseteq f_2$$
$$f_{33} = \{\{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}, X\} \supseteq f_3$$
إن f_{11}, f_{22}, f_{33} مرشحات أعظمية وكل مرشحة أكبر من f_{ii} تساويها
فيكون تعريف المرشحة الأعظمية كما يلي:
نقول عن المرشحة f إنها أعظمية
$$\forall f_1 \text{ مرشحة } : f \subseteq f_1 \implies f = f_1$$

وهذا يكافئ القول التالي :

$$\forall E \in P(X);\ E \subseteq F \quad or \quad E^c \subseteq F$$

تعريف فضاء هاوسدورف T_2 :

نقول عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء هاوسدورف أو إنه فضاء T_2 إذا ونفقط إذا :

$$\forall x,y \in X : x \neq y ;\ \exists\, O_x , O_y \in \tau : x \in O_x , y \in O_y$$
$$\wedge\ O_x \cap O_y = \phi$$

تمرين : كل فضاء متري هو فضاء هاوسدورف :

ليكن (X,d) فضاء متري و $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$

ولنعرف أن $d(x,y) = \varepsilon$ عندئذٍ نأخذ $O_x = N(x, \frac{\varepsilon}{10})$

عندئذٍ $O_x \cap O_y = \phi$ لأنه لو كان $z \in O_x \cap O_y$

$\varepsilon > 0$: $\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5}$

وهذا مستحيل .

تمرين : درسنا في محاضرات سابقاً التبولوجيات العشر على $\mathbb{R}$

وكان منها $\tau_{10} = \{A \subseteq X : A^c$ منتهية $\}$

تبولوجيا المتممات المنتهية .

هل $(\mathbb{R}, \tau_{10})$ هو فضاء T_2 :

الحل :

لنفرض جدلاً أن $(\mathbb{R}, \tau_{10})$ هو T_2 عندئذٍ :

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x \neq y ;\ \exists\, O_x , O_y \in \tau_{10} : O_x \cap O_y = \phi$$

وأن :

O_x^c , O_y^c منتهيات :

ولما كان $O_x \cap O_y = \phi$ عندئذٍ $(O_x \cap O_y)^c = \phi^c$

$$\underbrace{O_x^c \cup O_y^c}_{\text{منتهيات}} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{غير منتهية}}$$

$\Leftarrow (\mathbb{R}, \tau_{10})$ ليست T_2

تعريف القاعدة الجزئية: ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن S مجموعة جزئية من τ، نقول عن S إنها قاعدة جزئية لـ τ إذا كانت جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر S تكوّن قاعدة للتبولوجيا τ

بكلمات أخرى: إذا كان كل عنصر من τ اجتماعاً لتقاطعات منتهية من عناصر الجماعة S

تبولوجيا الجداء: ليكن لدينا الفضاءات ذات التبولوجية $(X_1,\tau_1), \ldots, (X_n,\tau_n)$ و $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ عندئذٍ

$$\beta=\{O_1\times O_2\times \cdots \times O_n : O_i\in\tau_i\}$$

تشكل قاعدة لتبولوجيا على X ندعوها تبولوجيا الجداء

END

إعداد

رشا رويلي

نذير تيناوي