٢٠١٨/١٠/١٥

٦

نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: السادسة ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات في الفضاء المتري

Syria Math

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-المتتاليات في الفضاء المتري (تقارب متتالية والنهاية)

٢-تمهيدية الحدودية والنهاية

٣-متتالية كوشي

ذكرنا في محاضرات سابقة أهمية تعريف تابع المفاهيم الطبولوجية على هذا الفضاء ، ومن أهم هذه المفاهيم مفهوم تقارب متتالية الذي سندرسه في محاضرتنا ، وأيضاً سنتعرف على متتالية في غاية الأهمية وهي متتالية الكوشية .

والآن سنبدأ في محاضرتنا .

تعريف تقارب متتالية في فضاء متري :

١-باستخدام النهاية

ليكن لدينا الفضاء المتري (X, d) وليكن لدينا $(x_n) \in X$ متتاليو من هذا الفضاء نقول عن هذه المتتالية إنها متقاربة إذا وجد عنصر x من X بحيث يكون :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

حيث أن التقارب هذا يتم في R (لأن المسافة بين الحد العام و النهاية عدد حقيقي)

وتسمى x نهاية المتتالية x_n وتكتب :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

عندئذ نقول بأن x_n تتقارب من X وإذا لم تكن متقاربة قلنا أنها متباعدة .

ونلاحظ أن $\boldsymbol{d(x_n, x)}$ عدد حقيقي وبالتالي فإن تغير n في الحد $\boldsymbol{d(x_n, x)}$ يعطي متتالية الأعداد الحقيقية ولتكن $\boldsymbol{a_n = d(x_n, x)}$ وبالتالي فإن تقارب d يعرف تقارب المتتالية $\boldsymbol{a_n}$ أي أن :

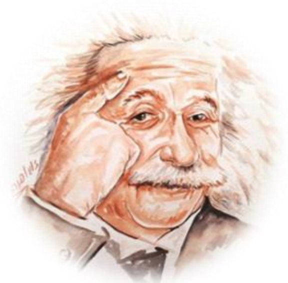
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

وهذا يفسر أن التقارب تم في $\mathbb{R}$.

٢- باستخدام تعريف التقارب ε:

رأينا سابقا أننا استطعنا أن نرد التقارب في الفضاءات المترية إلى التقارب في $\mathbb{R}$
وبالتالي نستطيع أن نعرف هذا التقارب بلغة الـ ε، أي أنه من أجل كل عدد حقيقي $(\varepsilon > 0)$ يوجد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon)$ حيث أن جميع العناصر x_n حيث $n \geq N$ تقع في جوار x بدءاً من حد معين أي تبعد عن نهاية المتتالية مقداراً أصغر من ε وهذا يكافئ ;

$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\,; \quad n \geq n_0 \;\Longrightarrow |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$



تعريف :

ليكن لدينا $\boldsymbol{(X, d)}$ فضاءاً مترياً :

نقول عن مجموعة جزئية M في X أنها مجموعة محدودة إذا كان قطرها

$\delta(M) = \sup(\boldsymbol{d(x, y)}) < \infty \;\; \boldsymbol{x, y \in M}$ عدداً محدوداً .

ونقول عن متتالية $\boldsymbol{(x_n)}$ في$\boldsymbol{X}$ أنها متتالية محدودة إذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في $\boldsymbol{X}$.

ومن الوضح إذا كانت $\boldsymbol{M}$ مجموعة محدودة فإن $\boldsymbol{M \subseteq B(x_0, r)}$ حيث $\boldsymbol{x_0}$ أي نقطة في $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{r}$عدد حقيقي موجب و إن العكس صحيح .

بعض خواص المتتاليات المتقاربة (وحدانية النهاية والمحدودية) :

تمهدية (المحدودية ، النهاية) :

إذا كان لدينا $X = (X, d)$ فضاءً مترياً فإن :

١- كل متتالية متقاربة في X محدودة ونها يتها وحيدة .

الإثبات:

ليكن لدينا x_n متتالية ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة من x وبالتالي يكون لدينا حسب التعريف .

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in N \quad ; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

كون ε عدد حقيقي اختياري مثبت لنختار $\varepsilon = 1$ عندئذ يكون $d(x_n, x) < 1$

ومنه أيا كان n فإن $d(x_n, x) < 1 + a$ حيث :

$$a = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots \dots, d(x_n, x)\}$$

نلاحظ أن a هو عدد حقيقي حسب تعريف تابع المسافة وإن المجموعة

$$A = \{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots \dots, d(x_n, x)\}$$

هي مجموعة محدودة كون عناصرها منتهية لذلك استطعنا أن نجد الـ max.

لنأخذ $k = a + 1$ عندئذ $B(x, k)$ ستحوي جميع عناصر المتتالية x_n

عندئذ $B(x, k)$ تحقق المطلوب .

<u>تذكرة :</u> تكون المجموعة محدودة إذا أمكن إيجاد كرة مفتوحة تحتويها

- والان نريد إثبات أن نهايتها وحيدة ولنفرض وجود نهايتين مختلفتين x, y للمتتالية x_n أي أنه :

$x_n \to x \qquad x_n \to y,$ وبالتالي يكون لدينا فرضاً :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

بالاعتماد على خواص المترك (مراجعة المثلث) .

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

ولدينا أيضاً $d(x, y) \geq 0$

ونعلم أن x_n متقاربة من x و x_n متقاربةء من y فرضاً ومنه بأخذ نهاية الأطراف كالتالي.

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x, y) \leq \lim_{n\to\infty} [d(x, x_n) + d(x_n, y)]$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x, y) \leq 0$$

ومنه وحسب مبرهة الإحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} d(x, y) = 0$

أي أن $d(x, y) = 0$ وبالتالي حسب خواص المترك يكون $x = y$ أي أن النهاية وحيدة .

تنويه :

إن التقارب في هذه المبرهنة وكذلك المحدودية هو في $\mathbb{R}$ كون d عدد حقيقي.

٢ –إذا كان $x_n \to x$,$y_n \to y$ في X فإن $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

البرهان :

لدينا المتتاليتان x_n, y_n متقاربتين فإن :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0$$

كما نعلم أن $d(x_n, y_n)$ يعبر عن أطوال (مسافات)غير سالبة لذلك فإن هذا التقارب هو تقارب في $\mathbb{R}$

ومنه فإن d تابع المسافة المألوفة.

لنطبق متراجحة المثلث مرتين .

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$d(x, y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(y, y_n)$$

$$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \ge -d(x_n, x) - d(y_n, y)$$

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$0 \le |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

نأخذ نهاية الأطراف عندما $n \to \infty$ نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$

وكذلك كون كلاً من x_n y_n , متقاربين فإن

$$\lim_{n\to\infty} [d(x_n, x) + d(y_n, y)] = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0 + 0 = 0$$

((استطعنا إدخال النهاية كون التقارب في $\mathbb{R}$)) ومنه حسب مبرهنة الإحاطة يكون.

$$\lim_{n\to\infty} [d(x_n, y_n) - d(x, y)] = 0$$

وبالتالي $d(x,y) \to d(x_n,y_n)$ وهو المطلوب.

تعريف متتالية كوشي (الأساسية):

نقول عن متتالية $\{x_n\}$ في فضاء متري $X=(X,d)$ أنها متتالية لكوشي (متتالية أساسية)
إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون .
$$d(x_n,x_m) < \varepsilon$$
أيا كان العددان الصحيحان n,m المحققان للشرط $n,m \geq n_0$: أي
$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists\, n_0 \in N\ ;\quad n,m \geq n_0 \quad \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشية ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح .

مثال معاكس :

ليكن لدينا الفضاء (Q,d) ولتكن لدينا المتتالية $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

إن العدد $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ هو عدد عادي وضوحاً ونلاحظ أن المتتالية a_n هي كوشية في Q ولكنها غير متقاربة في Q لأنها متقاربة من e وهو عدد غير عادي

وبالتالي وجدنا كوشية غير متقاربة .

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – رشا قرصة