نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثالثة عشر   ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـخواص متسلسلات التوابع + أمثلة.

٢ـالتكاملات المعتلة من النوع الأول + أشكالها + أمثلة.

مقدمة :

لتكن $\sum c_n x^n$ متسلسلة قوى ، لإيجاد نصف قطر التقارب نحسب :

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

أو

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ويكون مجال التقارب $]-\rho,\rho[$

*إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ يكون مجال التقارب $]a-\rho, a+\rho[$.

مثال : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}\right| = 1 \qquad ; \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

مجال التقارب $]-1,1[$

*إذا كان $x = 1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

فالمتسلسلة متقاربة حسب لايبنتز ومتسلسلة القيم المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متقاربة شرطياً.

*أما إذا كان $x=-1$

$$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

فالمتسلسلة متباعدة

وبالتالي مجال التقارب هو $]-1,1]$.

خواص متسلسلات القوى :

١) تتقارب كل متسلسلة قوى $\sum c_n x^n$ بانتظام على أي مجال مغلق محتوى في مجال التقارب.

٢) إن مجموع متسلسلة القوى $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ هو تابع مستمر في كل نقطة محصورة تماماً في مجال تقاربها.

٣) بفرض أن لمتسلسلتي القوى $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ المجموع نفسه على مجال التقارب $]-\rho,\rho[$ فإن $a_n=b_n$.

٤) يمكن مكاملة متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ حداً حداً على المجال المغلق $[-\rho,+\rho]$ المحتوى في مجال التقارب.

٥) يمكن اشتقاق متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ حداً حداً في كل نقطة محتواة في مجال تقاربها .

٦) إن تابع المجموع لمتسلسلة القوى $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ قابل للإشتقاق عدد كبير من المرات في كل نقطة من مجال تقاربها.

$$\frac{d^k S(x)}{dx^k}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots\dots(n-k+1)c_n x^{n-k}$$

مثال : لتكن لدينا متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=c_0+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+c_3\frac{x^4}{4}+\cdots+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

لنكاملها على المجال $[0,x]$ المحتوى في مجال تقاربها $[a,b]$:

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_n t^n dt$$

نشتقها :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

تمارين :

أوجد كل من المجاميع التالية :

١- $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots.(n+1)x^n + \cdots$

الحل : نعلم أن :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-x} \forall |x| < 1$$

باشتقاق الطرفين حداً حداً :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots.(n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

٢- $x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.8} + \cdots\cdots +$

نعلم أن : $\frac{2}{2-x} = \cdots\cdots + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \cdots\cdots + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + x$

نكامل متسلسلة القوى حداً حداً حيث تكون متقاربة من أجل $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ومنه $|x| < 2$

$$x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.8} + \cdots\cdots + \frac{x^{n+1}}{2^n(n+1)} + \cdots = \int_0^2 \frac{2}{2-t}dt$$

$$= [-2\,ln(2-t)]_0^x$$

$$= -2\,ln(2-x) + 2\,ln\,2$$

$$-2\left[ln\frac{2-x}{2}\right] = -2\,ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

التكاملات المعتلة

التكاملات المعتلة من النوع الأول

تعريف : لتكن الدالة $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,+\infty[$ و لنفرض أنّ $\int_a^A f(x)dx$ تكاملاً موجوداً

$(A \geq a)$ ولنفرض التابع $I(A) = \int_a^A f(x)dx$

نسمي التكامل الذي أحد حدوده $\pm\infty$ بالتكامل المعتل من النوع الأول

$$I(\infty) = \lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

*ويقال عن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ إنه **متقارب** إذا و فقط إذا كانت النهاية :

$$\lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$$

موجودة و محدودة (أي نهاية وحيدة لا تساوي لانهاية)

أما إذا كانت النهاية المذكورة آنفاً غير موجودة أو إنها تساوي اللانهاية (غير محدودة) فيقال أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **متباعد** .

مثال : اكتب التابع $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ على صورة متسلسلة قوى لـ x بدلالة قوى x

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots\cdots + t^n + \cdots\cdots$$

نأخذ $t = x^2$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots\cdots + t^{2n} + \cdots\cdots} *$$

او $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\cdots + (-1)^n t^n$

نبدل كل $t = -x^2$

نكامل المتسلسلة *

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

◀**ملاحظة** التكاملات المعتلة من النوع الأول هي التكاملات التي تأخذ أحد الأشكال التالية:

$$1)\quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

$$2)\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$$

$$3)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$$

ويكون التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ متقارب إذا كان كل من التكاملين متقاربين $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = -\int_{\infty}^{-a} f(-t)\,dt + \int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$ بحيث $x=-t \Rightarrow dx=-dt$

◀**ملاحظة** لا يتغير التكامل إذا تم تغيير قيمة a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

مثال: ادرس التكامل : $I=\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$

$$I = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}[-\cos x]_0^A$$

$I = \lim_{A\to+\infty}[-\cos A + \cos 0] =$ غير موجود

فالتكامل متباعد.

((الحاضر ليس هدفاً ، فالماضي والحاضر مجرد وسائل ، أما المستقبل فهو الهدف))

#بليز باسكال.

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو