نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: الثانية ◄ عنوان المحاضرة: المبدأ الأساسي للعد

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

سنكمل في هذه المحاضرة ما أخذناه عن طرائق العد و المبدأ الأساسي للعد و بعض الأمثلة و المتبادلات و المتوافقات.

حالة خاصة : إذا كان لدينا تجربة نتائجها N وكررنا هذه التجربة n مرة بشكل مستقل في كل مرة من المرات السابقة عندئذ يكون عدد نتائجها الكلية لهذه التجربة $|\Omega| = (N)^n$

مثال : تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة تمتلك ثلاث أطفال ⟸ $|\Omega| = 2^3 = 8$

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

ملاحظة : في حال تجربة ثنائية (لها نتيجتان) وكررنا بشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة فإن : $|\Omega| = 2^n$

3) العينات المرتبة : إذا كانت لدينا A مجموعة غير خالية وكان $r \epsilon \mathbb{N}^*$ فإن كل عنصر $(x_1, x_2 \dots . x_n)$ من A^r يدعى في علم الاحتمال والإحصاء عينة مرتبة من الحجم r مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة يساوي :

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة $|\Omega| = |A|^r = n^r$

مثال : بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق ⟸ $|\Omega| = n^n$

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية دون إعادة فأن :

$$|\Omega| = n \times (n-1) \times \dots \dots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= P_r^n \qquad \text{تراتيب } (n, r)$$

وفي هذه الحالة تكون العناصر مختلفة وندعوها نسقاً من الحجم r ومأخوذة من A

5) **الترانيب (المتبادلات) :** يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متغايرة) حيث نفرض إنه لدينا n شيء متمايز ونريد

اختيار r شيئاً منها $(r \leq n)$ ثم ترتيبها في متبادلة فيكون عدد الطرق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad , \qquad r \leq n$$

وعندما يكون $n = r$ أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك هو:

$$P_n^n = n \times (n-1) \times \dots \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال:

لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا ولكن لا يتوفر لنا

سوى أربعة أماكن فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة بأربعة أجزاء من

الأجزاء الستة ؟؟

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 360 \quad \text{طريقة}$$

" المتوافقات "

إن العديد من المواقف في العد تقتضي آلا نأخذ ترتيب العناصر في الانساق ،فإذا كان لدينا مجموعة A عدد عناصر ها n وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً $(r \leq n)$ فنقول عندئذٍ ان ذلك يدعى متوافقة جمعها r مأخوذة من A

ونرمز لها بـــ :

$$\boxed{C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots \dots (*)}$$

مثال ما عدد طرائق اختيار (3) كتب من (7) كتب ترتيبها على الرف ؟؟

بتطبيق العلاقة $(*)$ نجد ... $C_3^7 = \frac{7!}{3!\,.4!} = 35$

مثال بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طالبات من مجموعة تحوي (5) طالبات ؟؟

ايضاً بتطبيق العلاقة $(*)$ نجد ... $C_3^5 = \frac{5!}{3!.2!} = 10 = C_2^5$

ملاحظات

اصطلاحاً نضع

$0! = 1$

$1! = 1$

قاعدة

$C_r^n = C_{n-r}^n$

نعلم أن

$C_1^n = n \quad , \quad C_n^n = 1 \quad , \quad C_0^n = 1 \quad , \quad C_{n-1}^n = n$

ايضاً لدينا قاعدة .... $C_r^{n+1} = C_r^n + C_{r-1}^n$

إن عدد الطرائق التي يمكن تقسيم n شيئاً متمايزاً إلى قسمين أحدهما يتضمن n_1 شيئاً والأخر يتضمن n_2 شيئاً بحيث $\boxed{n = n_1 + n_2}$ فيكون عدد الطرائق :

$$C_{n_1,n_2}^n = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

ويمكن تعميم ذلك من اجل تقسيم المجموعة المؤلفة من n شيئاً متمايزاً إلى k قسماً أحدهما يتضمن n_1 شيئاً والثاني يتضمن n_2 شيئاً حتى الرقم k يحوي n_k شيئاً . $\boxed{n_1 + n_2 + \dots \dots \dots + n_k = n}$

فيكون عدد الطرائق لهذا التعميم هو :

$$C_{n_1,n_2 \dots n_k}^n := \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots\dots n_k!}$$

مثال إن عدد طرق توزيع r كرة في n صندوق بحيث ان الصندوق b_i يحوي r_i حيث $1 < i \le n$

هو ان ... $|\Omega| = C_{r_1,r_2\dots r_n}^r = \frac{r!}{r_1!.r_2!\dots r_n!}$

العينات غير المرتبة

توزيع r كرة ((متمايزة أو غير متمايزة)) على n صندوق :

١) ان توزيع r كرة متمايزة على n صندوق يعطي بـ

$$|\Omega| = \underbrace{n \times n \dots \dots . \times n}_{r \text{ مرة}} = n^r$$

٢) في حال كون الكرات غير متمايزة فإن عدد الطرق المختلفة لتوزيع r كرة غير متمايزة على n صندوق هو : $|\Omega| = C_r^{n+r-1}$ ((دون برهان))

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – نهى حبشية