المحاضرة التاسعة 9

◄ دكتور المادة: غصون الجيرودي

◄ عنوان المحاضرة: طريقة لاغرانج

نظري ☑

عملي ☐

طريقة لاغرانج :

الشكل القياسي :

$$((1))\quad \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{s.t} \quad g_i(x) = b_i \qquad i=1,\dots m \\ x \geq 0 \quad : \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

دالة لاغرانج من الشكل :

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

حيث $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ مضاريب لاغرانج

λ_i مضروب لاغرانج للشرط i

مثال :

$$\text{Min } e^x + y^2 x$$

$$2x + 3y + y^2 = 7$$

$$x^2 + y = 8$$

$$x, y \geq 0$$

بالتالي دالة لاغرانج هي

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = e^x + y^2 x - \lambda_1 (2x + 3y + y^2 - 7) - \lambda_2 (x^2 + y^2 - 8)$$

ملاحظة :

تشكل منطقة حلول البرنامج القياسي $X(b)$

$$X(b) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = b_i \quad ; i=1,\dots m\}$$

$$x \geq 0$$

نظرية لاغرانج الكافية من أجل المسألة ((1))

نفرض $\lambda^* \in R^m$ و $x^* \in \mathbb{R}^n$ تحقق لدينا

$$L(x^*, \lambda^*) = Min\, L(x, \lambda^*)$$

اذا كان $x^* \in x(b)$ عندها x^* هي الحل الأمثل للمسألة ((1))

البرهان :

$$((1)) \left.\begin{array}{l} \underset{x \in X(b)}{Min}\, F(x) \\ g_i(x) = b_i \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underset{x \in X(b)}{Min}\, f(x) = \underset{x \in X(b)}{Min}\, f(x) - \underbrace{\sum \lambda_i^* (g_i(x) - b_i)}_{=0}$$

$$g_i(x) = b_i \Leftrightarrow g_i(x) - b_i = 0 \Leftrightarrow \lambda^* (g_i(x) - b_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* (g_i(x) - b_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{x \in X(b)}{Min}\, F(x) = \underset{x \in X(b)}{Min}\, F(x) - \sum \lambda_i^* (g_i(x) - b_i)$$

$$\geq \underset{x \in \mathbb{R}^n}{Min}\, f(x) - \sum \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

$$= Min\, L(x, \lambda^*) = L(x^*, \lambda^*)$$

بما أن $x^* \in X(b)$ فإن :

$$Min\, f(x) \geq f(x^*)$$

ومنه نجد ان x^* هو الحل الأمثل للبرنامج «1»

تعريف الدالة المرافقة (الثنوية) $d(\lambda)$:

$$d(\lambda) = \underset{x \in X}{Min}\, L(x, \lambda) = L(x^*(\lambda), \lambda)$$

نعرف البرنامج الموافق (الثنوي) بأنه

$$Max\ d(\lambda)$$

$$s.t\ \ y \in Y$$

$$Y = \{\lambda \in R^m : \underset{x \in R^m}{Min}\, L(x, \lambda)\}$$

مثال : ليكن لدينا البرنامج التالي

$$Min\ F(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$$
$$s.t\ \ x+y=k \quad ; \qquad k \geq 0 \text{ ثابت موجب}$$
$$x,y \geq 0$$

1 اوجد دالة لاغرانج .
2 اوجد الدالة المرافقة .
3 اوجد $x^*(\lambda)$, $y^*(\lambda)$
4 اوجد البرنامج المرافق .

الحل : دالة الهدف تابعة لمتحولين $(x,y) \in R^2$

لدينا معادلة واحدة لشروط المسألة ومنه لدينا λ واحدة فقط

1 دالة لاغرانج بالشكل

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{(x-3)^2 + (y-4)^2}_{F \text{ دالة الهدف}} - \underbrace{\lambda(x+y-k)}_{\sum_{i=1} \lambda_i(g_i(x)-b_i)}$$

2 الدالة المرافقة هي دالة تتبع لـ λ فقط

$$d(\lambda) = \underset{(x,y)\in R^2}{Min}\ L(x,y,\lambda)$$

لمعرفة وجود Min أو Max للتابع
نوجد المشتق الاول ونعدمه ، نوجد المشتق الثاني
اذا كان المشتق الثاني ≥ 0 $\Leftarrow$ يوجد Min للتابع
اذا كان المشتق الثاني ≤ 0 $\Leftarrow$ يوجد Max للتابع
اولاً : نوجد L_x ، L_y

$$\nabla_x L = 2(x-3) - \lambda \qquad\qquad \nabla_y L = 2(y-4) - \lambda$$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$z^T \nabla^2 L z = [z_1, z_2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 2z_1^2 + 2z_2^2 \geq 0$$

بما أن $\nabla^2 L$ معرفة موجبة فنوجد في المعزل وهي:

$$d(\lambda) = \operatorname{Min} L(x, y, \lambda) = L(x^*(\lambda), y^*(\lambda), \lambda)$$

$$\nabla_x L = 0 \Rightarrow 2(x-3) - \lambda = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\lambda - 6}{2}$$

$$\nabla_y L = 0 \Rightarrow 2(y-4) - \lambda) = 0 \Rightarrow y^* = \frac{\lambda + 8}{2}$$

نعوض $x^*(\lambda)$ ، $y^*(\lambda)$ في الدالة المرافقة:

$$d(\lambda) = \left(\frac{\lambda+6}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{\lambda+8}{2} - 4\right)^2 - \lambda\left(\frac{\lambda+6}{2} + \frac{\lambda+8}{2} - k\right)$$

$$x^*(\lambda) = \frac{\lambda+6}{2} \qquad y^*(\lambda) = \frac{\lambda+8}{2}$$ 3

4 البرنامج المرافق

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} d(\lambda) \\ &\text{s.t } y \in Y \\ &Y = \{\lambda \in \mathbb{R} : \nabla_x L = 0 \quad \nabla_y L = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Max} \left(\frac{\lambda+6}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{\lambda+8}{2} - 4\right)^2 - \lambda(\lambda + 7 - k)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t } \quad & 2(x-3) - \lambda = 0 \\ & 2(y-4) - \lambda = 0 \end{aligned}$$

طلب اضافي ثم استنتج الحل الأمثل $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$

الحل الأمثل يحقق شروط المسألة

$$x^* + y^* = k$$

$$\frac{\lambda+6}{2} + \frac{\lambda+8}{2} = k$$

$$2\lambda + 14 = 2k \Rightarrow \lambda = k - 7$$

وعنه الحل الأمثل

$$x^* = \frac{\lambda^*+6}{2} = \frac{k-7+6}{2}$$

$$y^* = \frac{\lambda+8}{2} = \frac{k-7+8}{2}$$

مبرهنة المرافق الأضعف

$$\underset{x \in x(b)}{\text{Min}}\, f(x) \geq \underset{\lambda \in Y}{\text{Max}}\, d(\lambda)$$

البرنامج الأساسي   البرنامج المرافق

دائماً الحل المرافق قيمته أصغر من الحل الأساسي

وتتحقق المساواة في حال كان البرنامج الأساسي محدب

$$\underset{x \in x(b)}{\text{Min}}\, f(x) = \text{Max}\, d(\lambda)$$