١٧-١٠-٢٠١٨

نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄المحاضرة : السادسة ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-مبرهنات بخصوص التشاكلات المودلية

مبرهنة : إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية وكان لدينا التطبيقين :

$$f: B \to A$$

$$g: C \to A$$

فإن : ١- يوجد تطبيق $h: C \to B$ بحيث $foh = g$

٢-$Im(g) \subseteq Im(f)$

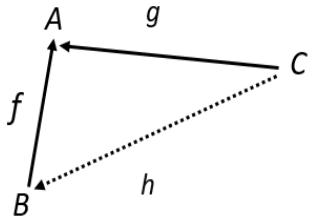
الإثبات :

(١)⇐(٢) : لنفرض وجود تطبيق $h: B \longrightarrow C$ بحيث $foh = g$ ولنبرهن أن $Im(g) \subseteq Im(f)$

فإن $\forall x \in C$

أي أن $g(x) = (foh)(x) = f(h(x)) \in Im(f)$

$Im(g) \subseteq Im(f)$



(٢)⇐(١) : لنفرض أن $Im(g) \subseteq Im(f)$ ولنبرهن أنه يوجد تطبيق h بحيث $foh = g$

إذا كانت القضية (٢) محققة من أجل $x \in C$ فإنه يوجد $y \in B$ بحيث $g(x) = f(y)$

اذا رمزنا احد العناصر $y \in B$ التي من اجلها $g(x) = f(y)$ بالرمز y_0 فإن يوجد تطبيق

$$h: C \to B$$

$$x \to y_0$$

معرفة ب $h(x) = y_0$

$$\forall x \in C: (foh)(x) = f\big(h(x)\big) = f(y_0) = g(x)$$

وهو المطلوب...

ملاحظة : هاتان المبرهنتان لن تكونا صحيحتان في حالة التشاكلات المودولية

مثال : إن Z مودول على نفسها فإذا أخذنا التشاكل :

$$f: Z \to Z$$

$$f(z) = 2z \ : \quad \forall z \in Z$$

و التشاكل $I: Z \to Z$ عندئذ حسب مبرهنة سابقة يوجد تطبيق

$$h: Z \to Z$$

$$hof = I$$

لكن h لا يمكن أن يكون تشاكلا مودوليا لأنة لو كان فإن

$$(hof)(z) = I(z) : \quad \forall z \in Z$$

$$h\big(f(z)\big) = z$$

$$\Rightarrow h(2z) = 2h(z) = z$$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{1}{2}\, z$$

وهذا غير صحيح في $\mathbb{Z}$

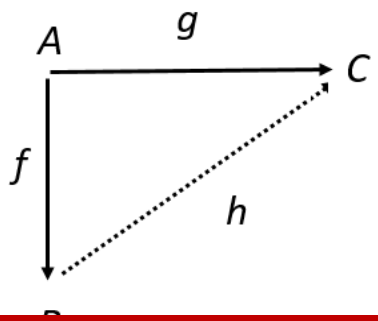
مبرهنة : إذا كان A, B, C ثلاث مودولات على حلقة $\mathbb{R}$ و كان :

$$f: A \to B$$

Syria Math Team

$$g: A \to C$$

تشاكليين مودوليين وكان f غامر فإن : ١- يوجد تشاكل مودولي وحيد



$$h: B \to C$$

$$hof = g$$

٢- $Ker(f) \subseteq Ker(g)$

إضافة لذلك يكون :التشاكل h متباين $\Leftrightarrow Ker(f) = Ker(g)$

الإثبات :

(١)⇐(٢) $\forall x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_B$

وكون (١) صحيحة فرضا :

$$g(x) = (hof)(x) = h(f(x))$$

$$= h(0_B) = 0_C$$

$$\Rightarrow x \in Ker(g)$$

$$\Rightarrow Ker(f) \subseteq Ker(g)$$

(٢)⇐(١) *لنفرض أن* $Ker(f) \subseteq Ker(g)$ عندئذ: $\forall x, y \in A$ بحيث

$$f(x) = f(y)$$

فإن: $f(x - y) = 0_B$

$$\Rightarrow x - y \in Ker(f) \subseteq Ker(g)$$

وبالتالي : $g(x - y) = 0_C$ ومنه فإن : $g(x) = g(y)$

وحسب مبرهنة سابقة : يوجد تطبيق $h: B \to C$ بحيث $hof = g$

لنبرهن أن h تشاكل مودولي

$$\forall b_1, b_2 \in B \quad , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

فإنه يوجد $a_1, a_2 \in A$ بحيث : $b_2 = f(a_2)$, $b_1 = f(a_1)$ لأن f غامر ومنه :

$$h(\alpha b_1 + \beta b_2) = h\big(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)\big)$$

$$\underset{\text{تشاكل } f}{=} h(f(\alpha a_1 + \beta a_2))$$

$$= (hof)(\alpha a_1 + \beta a_2)$$

$$= g(\alpha a_1 + \beta a_2)$$

$$\underset{\text{تشاكل } g}{=} \alpha g(a_1) + \beta g(a_2)$$

$$= \alpha(hof)(a_1) + \beta(hof)(a_2)$$

$$= \alpha\left(h\big(f(a_1)\big)\right) + \beta\left(h\big(f(a_2)\big)\right)$$

$$= \alpha h(b_1) + \beta h(b_2)$$

أي ان h تشاكل مودولي ..

لنبرهن أن h وحيد : لو فرضنا وجود تشاكلين

$$h, k : B \to C$$

$$hof = g \text{ بحيث}$$

وكذلك $kof = g$

أي $kof = hof$ (حيث f غامر إذا فهو قابل لاختصار من اليمين)

أي أن $h = k$ وهو المطلوب ...

الإضافة : لنفرض أن h متباين ولنبرهن أن $Ker(f) = Ker(g)$ لدينا فرضا

$$Ker(f) \subseteq Ker(g) \quad , \forall x \in Ker(g)$$

$$g(x) = 0_C \qquad (\Leftarrow)$$

وبالتالي : $hof(x) = h\big(f(x)\big) = 0_C$

وبما أن h متباين $\Leftarrow f(x) = 0_B$

Syria Math Team

$$\Rightarrow x \in Ker(f)$$

أي ان $Ker(f) \supseteq Ker(g)$

$$\Rightarrow Ker(f) = Ker(g)$$

$(\Rightarrow)$ لنفرض أن $Ker(f) = Ker(g)$

ولنبرهن أن h متباين $\forall b \in Ker(h)$

فإن $h(b) = 0$ وبما أن f غامر يوجد $a \in A$

بحيث $f(a) = b$

$$\Leftarrow 0 = h(b) = h(f(a))$$

أي $g(a) = 0$

ومنه $a \in Ker(g) = Ker(f)$

وبالتالي $f(a) = 0$

إذا $b = 0$ أي أن $Ker(h) = \{0\}$

$\Leftarrow h$ متباين

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هج – رغد جوده – بكر مشرف