المحاضرة الثالثة

نظري ■
عملي □

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تباين الموضعي

* ملاحظة: قد تكون جميع المركبات غير متباينة ومع ذلك الدالة تكون متباينة،

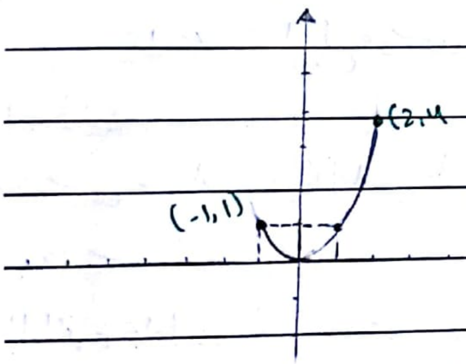
* مثال: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ بحيث $0 \leq t < \frac{3\pi}{2}$

ان الدالة $\sin$ غير متباينة على الربع الأول والثاني والدالة $\cos$ غير متباينة على ربع ثاني وثالث ولكن الدالة $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ متباينة على $[0, \frac{3\pi}{2})$ الا ان $\sin$ و $\cos$ كلاهما غير متباين على مجال $[0, \frac{3\pi}{2})$

* ملاحظة: «كل مطردة تماماً هي دالة متباينة على ذلك المجال والعكس غير صحيح»

* مثال: هل بيان الدالة $f(x) = x^2$ المعرف على المجال $[-1, 2]$ قوس بسيط؟؟ علل؟؟

نعم هو قوس بسيط لان دالة مستمرة على مجال مغلق $[-1, 2]$ وان بيان هذه الدالة هو قوس القطع المكافئ $y = x^2$ المحصور بين النقطتين $(-1,1)$ $(2,4)$ ضمناً



«سؤال بطريقة أخرى»: هل قوس قطع مكافئ محصور بين النقطتين $(-1,1)$ $(2,4)$ قوس بسيط؟؟

* تمرين:

اثبت ان مجموعة نقاط الفضاء المعرفة بالعبارة التالية:

$$\Gamma = \{ (x, f(x), g(x)) : x \in [a,b] \}$$

و f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a,b]$ هي قوس بسيط ؟؟؟ ??? (^_^)

لنأخذ التمثيل الوسيطي: $\vec{r}(t) = (t, f(t), g(t))$: $\vec{r} : [a,b] \to R^3$

من الواضح ان $\vec{r}$ مستمرة على $[a,b]$ لاستمرار كل من مركباتها وهي متباينة لتباين مركبتها الأولى

$\vec{r}([a,b]) = \{ \vec{r}(t) ; t \in [a,b] \} = \{ (t, f(t), g(t)) : t \in [a,b] \}$

وهي مجموعة المطلوب بيان انها قوس بسيط ?

* هل يمكن لـ مخطط قوس أحد أطرافه محذوفة على الأقل ان يكون قوساً بسيطاً ؟؟

للإثبات: لنفرض جدلاً ان ذلك المخطط قوس بسيط لنرمز له بـ Γ وطرفه المحذوف M وبما أننا فرضنا جدلاً بأن Γ قوس بسيط هذا يقتضي وجود تمثيل وسيطي مستمر ومتباين على مجال مغلق $[a,b]$ مجموعة النقطية هي Γ بحيث $\vec{r}([a,b]) = \vec{\Gamma}$

ان $\vec{r}$ دالة مستمرة و $[a,b]$ مجال مغلق وهو مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ وبالتالي $\vec{r}([a,b])$ هي مجموعة متراصة من $\mathbb{R}^2$ لأنها صورة لمتراصة وفق مستمر

ان نقطة M هي نقطة تجمع لـ Γ لأن أي جوار لهذه نقطة لابد أن يحوي عدداً منه لنقاط Γ إلا ان M نقطة ليست من Γ $\Leftarrow$ فان مجموعة $\vec{\Gamma}$ غير مغلقة لأنها وجد نقطة تجمع وغير محتواة بـ Γ وبالتالي فإن هذا تناقض لأن $\vec{r}([a,b])$ متراصة وبالتالي فرض الجدلي خاطئ.

تذكرة: متراصة $\Leftarrow$ مغلقة ومحدودة.

* هل يمكن لـ مخطط غير محدود ان يكون قوس بسيط ؟؟؟ نفس الأسلوب سابقاً لكن نعتمد على انها غير محدودة.

* تمرين: هل ثلاثة ارباع قوس دائرة مع طرفيه قوساً بسيطاً ؟؟ سهل بـ الطريقة العادية ؟

* ملاحظة:

* أي قوس من دائرة غير كامل مع طرفيه هو قوس بسيط والدائرة ما عدا نقطة منها هي قوس غير بسيط

* الدائرة كاملة ليست قوساً بسيطاً.

الإثبات: لو فرضنا جدلاً ان دائرة قوس بسيط هذا يعني وجود تمثيل وسيط مستمر ومتباين على مجال مغلق $[a,b]$ مجموعته النقطية هي دائرة هذا يعني ان رأس متجه $\vec{r}(t)$ سيمسح كامل الدائرة عندما t تمسح مجال $[a,b]$ لأنها مجموعته النقطية لـ $\vec{r}(t)$ وهذا يعني ايضاً انه لابد لرأس متجه $\vec{r}(t)$ ان يمسح واحد على الأقل من نقاط الدائرة مرتين على الأقل لأن عدم تحقق هذا يعني عدم انغلاق الدائرة. وايضاً يعني عدم تباين الدالة $\vec{r}$ وبالتالي ليست قوساً بسيطاً.

* تعميم: اي منحني مغلق ليس قوساً بسيطاً.

* دالة متباينة موضعياً :

ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$ و $\vec{r}$ دالة متجهية معرفة على I وليكن a و b بحيث $-\infty \le a < b \le \infty$ طرفا I نقول عن $\vec{r}$ دالة متباينة موضعياً على I إذا وفقط إذا وجدت لكل نقطة $t \in [a,b]$ مجالاً من شكل $J_t = [t-\delta, t+\delta]$ محتواة في I بحيث يكون $\vec{r}_{J_t}$ متباينة.

إذا كان $a \in I$ نضيف الشرط وجود $\delta > 0$ بحيث يكون $I \supseteq J_a = [a, a+\delta]$ و r_{J_a} متباين ، إن كانت $b \in I$ نضيف الشرط وجود $\delta > 0$ بحيث $J_b = [b-\delta, b] \subseteq I$ و r_{J_b} متباين.

* مثال :

أن دالة $f(x) = x^2$ دالة غير متباينة على مجال $\mathbb{R}$ ولكنها متباينة على مجال $[0, \infty[$ وعلى مجال $]-\infty, 0]$

* * * انتهت المحاضرة * * *