29-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد يونسو

◄المحاضرة :الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: الجبر وجبر الأحداث

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الجبر وجبر الأحداث
٢ـ الفضاء الاحتمالي
٣ـ نتائج هامة

تعريف: ليكن Ω فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة ما وليكن A صفا من أجزاء Ω

$$\Omega = \{1,2,3\} \qquad A = [\{1\},\{1,2\},$$

بحيث $A_1 = \{1\}$ و $A_2 = \{1,2\}$ و $\Omega = \{1,2,3\}$ عندئذ $A = \{A_1, A_2, \Omega\}$

أي مجموعة من A هي عبارة عن حدث

نقول عن A أنه جبرا على Ω إذا تحققت الشروط الآتية:

١) $\Omega \in A$
٢) $\forall A,B \in A : A \cup B \in A$
٣) $\forall A \in A : \bar{A} \in A$

يسمى جبرا

واذا حققت A إضافة إلى ذلك أن

٤) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in A \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$

نقول أن A جبرا تاما على Ω

نتائج:

١) $\varphi \in A$ تنتمي لـA دائما لأن:

$$\varphi = \bar{\Omega} \in A$$

٢) A مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي أي أن:

Syria Math Team

$$\forall A_1 , A_2 , \dots . , A_n \in A \Longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} A_i \in A$$

نستخدم الاستقراء لأنه بالاستقراء الرياضي لدينا $A \Longrightarrow A_1 \cup A_2$ بحسب الشرط الثاني في الشروط الواجب تحققها لنفرض أن

$A \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots . \cup A_k$ أي $2 \leq k \leq n$

وهذا محقق

$$A \in A_1 \cup A_2 \cup \dots . \cup A_k \cup A_{k+1}$$

وبفرض أن $A = A_1 \cup A_2 \dots$

عندئذ نجد حسب الشرط الثاني أن $A \cup A_{k+1}$ اذا هذا محقق

٣) A مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي

$$\forall A_1 , A_2 , \dots . , A_n \in A \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i \in A$$

لأن $A_1 \cap A_2 \cap \dots \dots . \cap A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$

٤) كل جبر تام هو جبر

والجبر التام يحقق شروط الجبر + جبر الاضافة

٥) اذا كان Ω مجموعة منتهية أو معدومة فإن مجموعة أجزاء Ω والتي نرمز لها ب$\zeta(\Omega)$ تشكل جبرا تاما على Ω

$$\Omega = \{ 1 , 2 , 3 \}$$

$$2^3 = 8$$

$$A = \zeta(\Omega)$$

$$A = \{ (1), (2), (3), (1 , 2), (1 , 3), (2 , 3), (1 , 2 , 3), \varphi \}$$

الفضاء الاحتمالي: هو الثلاثية (Ω , A , P) حيث:

- Ω فضاء الأحداث الابتدائية
- A جبر تام على Ω (جبر الاحداث)
- P تابع أو دالة عددية $P: A \rightarrow R$

Syria Math Team

نبحث عن قاعدة الربط

التعريف التقليدي للاحتمال

ليكن $\Omega = \{ w_1 , w_2 , \dots\dots , w_n \}$

وكانت الأحداث الابتدائية $\{w_1\}, \{w_2\}, \dots . \{w_3\}$

متساوية في الوقوع

الفرص $\forall A \in A: P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

أي $\frac{nA}{n} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لوقوع } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

يوجد مسلمات:

١) $\forall A \in A: P(A) \geq 0$ لأن $P(A) = \frac{n_A \geq 0}{n>0} \geq 0$

٢) $P(\Omega) = 1$

لأن $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{n}{n} = 1$

٣) إذا كان A, B حدثين متنافين من $(A \cap B) = \varphi$ A

فإن $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

لأن $|A \cup B| = |QA| + |B| = nA + nB$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{nA + nB}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{nB}{n}$$

$$= P(A) + P(B)$$

٤) $\forall A \in A: P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

لأن $A \cap \acute{A} = \varphi$

ولدينا $A \cup \acute{A} = \Omega$

بالتالي حسب النتيجة الثالثة

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

٥) $P(\varphi) = 0$ لأن $\varphi = \Omega$ بالتالي :

Syria Math Team

$$P(\varphi) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

٦) $\forall A, B \in A : A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

لأن : لدينا $(B - A) \cap A = \varphi$

$$B = (B - A) \cup A$$

$$P(B) = P\big((B - A) \cup A\big)$$

$$P(B - A) + P(A)$$

ومنه فإن اثبات النتيجة الثالثة

$$P(B) - P(A) = P(B - A) \geq 0$$

$$P(B) - P(A) \geq 0 \Longrightarrow P(A) \leq p(B)$$

ملاحظة:

إذا كان $B \supseteq A$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$\forall A, B \in A$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

لأن $A - (A \cap B) = A - B$

$$B - (A \cap B) = B - A$$

ونعلم أن $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$

$$P(A - B) = P[A - (A \cap B)] = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = P[B - (A \cap B)] = P(B) - P(A \cap B)$$

انتهت المحاضرة

إعداد :إيمان عيد*راما خلبوص تنسيق: محمد أنس القزاز

Syria Math Team