8-11-2018

نظري

◀ دكتور المادة: خليل تحيى

◀ المحاضرة: الرابعة عشر ◀ عنوان المحاضرة: معادلة كليرو

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ امثلة عن المحاضرة السابقة
٢ـ معادلة كليرو
٣ـ التوابع المستقلة خطيا ومحدد رونسكي.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^2 y'^2 + xyy' - 2x^2 = 0 \ldots (1)$$

الحل:

$$a = y^2 , \quad b = xy , \quad c = -2x^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x^2y^2 - 4(y^2)(-2x^2) = 9x^2y^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |3xy|$$

$$y_1' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-xy + 3xy}{2y^2} = \frac{x}{y}$$

$$y_2' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-xy - 3xy}{2y^2} = \frac{2x}{y}$$

$$\left(y' - \frac{x}{y}\right)\left(y' + \frac{2x}{y}\right) = 0 \ldots (*)$$

الأن نوجد تكامل ما داخل الأقواس لكي نستطيع إيجاد الحل العام للمعادلة(*)

$$: y' - \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y.dy = x.dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \ldots (1)$$

$$: y' + \frac{2x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow y.dy = -2x.dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x^2 + c_2 \ldots (2)$$

نعوض (1) و(2) في (*) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-c_1\right)\left(\frac{y^2}{2}+x^2-c_2\right)=0$$

٢- $y'^2-2xy'+x^2-y^2=0$

الحل:

نلاحظ ان الحد الأول يشكل متطابقة تربيعية

$$(y'-x)^2-y^2=0$$

أصبحت فرق مربع حدين ومنه:

$$(y'-x+y)(y'-x-y)=0$$

ومنه اما: $y'-x+y=0\ \dots(1)$ او $y'-x-y=0\ \dots.(2)$

ولنوجد الحل للمعادلتين

$$y'-x+y=0\Rightarrow y'=x-y$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ترد الى فصل المتحولات نفرض $z=x-y$ نفاضل الطرفين ومنه $dz=dx-dy$ نقسم المعادلة على dx ومنه: $\frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1-z\Rightarrow\frac{dz}{1-z}=dx\Rightarrow x=-ln|1-z|+ln|c_2|\Rightarrow x=ln\left|\frac{c_1}{1-z}\right|$$

نعوض قيمة $z=x-y$ ومنه:

$$x=ln\left|\frac{c_1}{1-x+y}\right|\Rightarrow x-ln\left|\frac{c_1}{1-x+y}\right|=0$$

وهو الحل العام للمعادلة (1)

ومنه لنوجد الحل للمعادلة (2):

$y'=x+y$ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة ترد الى فصل المتحولات:

لنفرض ان $z=x+y$ نفاضل الطرفين ومنه: $dz=dx+dy$ نقسم المعادلة على dx ومنه:

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1+z\Rightarrow\frac{dz}{1+z}=dx\underset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow}x=ln|1+z|+ln|c_2|$$

$x = ln|c_2(1+z)|$ نعوض قيمة $z = x + y$:

$$x = ln|c_2(1+x+y)| \Rightarrow x - ln|c_2(1+x+y)| = 0$$

وهو الحل للمعادلة (2) ومنه جداء الحلين (2) & (1) ينتج الحل العام:

$$\left(\left(x - ln\left|\frac{c_1}{1-x+y}\right|\right)(x - ln|c_2(1+x+y)|)\right) = 0$$

المعادلات التفاضلية من مراتب عليا

تعريف: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

والمتجانسة في $\boldsymbol{y}$ ومشتقاتها وتحقق العلاقة:

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{x}, \lambda.\mathrm{y}, \lambda.\mathrm{y}', \dots, \lambda.y^{(n)}\right) = \lambda^n.F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

وبالتالي لإيجاد الحل العام نفرض: $\boxed{\lambda = \frac{1}{y}}$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{x}, 1, \frac{\mathrm{y}'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

ومنه نفرض لخفض مرتبة المعادلة التفاضلية: $\frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{y}} = \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{y}' = \mathrm{y.z}$

$$y'' = y'.z + y.z' \xRightarrow{y'=y.z} y'' = y.z^2 + y.z' = y(z^2 + z') \Rightarrow \frac{y''}{y} = (z^2 + z')$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\mathrm{y.y}'' - y'^2 = 6xy^2 \dots (1)$$

الحل

نفرض:

$$\frac{y'}{y} = z \dots (*) \Rightarrow y' = y.z$$

$$\frac{y''}{y} = (z^2 + z') \dots (**)$$

نقسم طرفي المعادلة (1) على y^2 فيصبح لدينا:

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 6x$$

والآن نعوض * و** في المعادلة الأخيرة فيصبح لدينا:

$$(z^2 + z') - z^2 = 6x \Rightarrow z' = 6x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 6x \Rightarrow dz = 6x.dx$$

$$\xRightarrow{\text{نكامل}} z = 3x^2 + c_1 \xRightarrow{z=\frac{y'}{y}} \frac{y'}{y} = 3x^2 + c_1 \Rightarrow \boxed{y' = (3x^2 + c_1).y}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى لنوجد الحل العام لها:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (3\mathrm{x}^2 + \mathrm{c}).\mathrm{y} \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = (3x^2 + c).dx$$

$$\xRightarrow{\text{نكامل}} \ln|y| = x^3 + c_1x + c_2 \Rightarrow y = e^{x^3 + c_1x + c_2}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

معادلة كليرو

تأخذ معادلة كليرو الشكل:

$$y = x.P + F(P)\,; P = y'$$

لإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نشتق بالنسبة ل x :

$$(y' = P) = P + x.\frac{dP}{dx} + F'(P).\frac{dP}{dx} = P + [x + F'(P)].\frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow [x + F'(P)].\frac{dP}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = c$$

فيكون الحل العام من الشكل: $\boxed{y = c.x + F(c)}$

وأنّ: $x + F'(P) = 0$ تعطينا الحل الشاذ لمعادلة كليرو.

((أمّا الحل العام ف ينتج عن تبديل كل P ب c)) .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية والحل الشاذ:

$$y = x.P + 2P^2 \dots (1)$$

الحل:

نلاحظ أنّ هذه المعادلة من نوع معادلة كليرو لذلك يكون الحل العام بتبديل كل: $P = c$

نشتق بالنسبة ل x : $y' = P + x.\frac{dP}{dx} + 4P.\frac{dP}{dx} = P + [x + 4P].\frac{dP}{dx}$

$$\Rightarrow [x + 4p].\frac{dP}{dx} = 0$$

إمّا: $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = c$ نعوضها بالمعادلة (1) فنحصل على الحل العام:

$$y = cx + 2c^2$$

أو: $[x + F'(P)] = 0; F(P) = 2p^2 \Rightarrow F'(P) = 4P$

$$\Rightarrow x + 4P = 0 \Rightarrow P = -\frac{x}{4}$$

نعوضها بالمعادلة (1) فنحصل على الحل الشاذ: $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8}$

التوابع المستقلة خطياً ومعين رونسكي

تعريف: نقول عن مجموعة التوابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ أنها مستقلة خطياً في المجال $[a, b]$ إذا تحقق:

$$\alpha_1.y_1 + \alpha_2.y_2 + \dots + \alpha_n.y_n = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

ونقول عن هذه التوابع أنّها مرتبطة خطياً إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

مبرهنة (1):

إذا كانت التوابع: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ مرتبطة خطياً على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق من المرتبة $(n-1)$ فإنّ المعين:

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

يطابق الصفر على المجال $[a, b]$ نسمي هذا المعين (المحدد): معيّن رونسكي.

إذا كان معين رونكسي لا يطابق الصفر فإننا نقول أن مجموعة التوابع مستقلة خطيا.

وبما أنّ التوابع مرتبطة خطياً فإنّ: $\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \dots + \alpha_n . y_n = 0 \dots (1)$

أنّ الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

وباشتقاق العلاقة (1) ل $(n-1)$ مرة متتالية :

$$\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \dots + \alpha_n . y_n = 0$$
$$\alpha_1 . y_1' + \alpha_2 . y_2' + \dots + \alpha_n . y_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 . y_1^{n-1} + \alpha_2 . y_2^{n-1} + \dots + \alpha_n . y_n^{n-1} = 0$$

وبالتالي هذه العلاقات تمثّل جملة معادلات جبرية متجانسة بالنسبة إلى $\alpha_i ; i = 1,2, \dots, n$

وحسب الفرض فإنّها تقبل حلاً غير الحل الصفري لأجل كل قيمة ل x على المجال $[a, b]$ وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان معيّن الأمثال (رونسكي) يطابق الصفر.

نستنتج من المبرهنة السابقة:

أنّه إذا كانت جملة التوابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ وكان معين رونسكي لهذه التوابع لا يطابق الصفر فإنّ جملة التوابع تكون مستقلة خطياً.

مثال توضيحي: ليكن لدينا: $1, x, x^2, x^3$

فإنّ محدد الأمثال (معيّن رونسكي) يكون: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ أيّ أنّها مستقلة خطياً.

◄**تذكرة:** محدد المثال التوضيحي هو محدد مصفوفة مثلثية فقيمته تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

مبرهنة (٢):

إذا كان التابع $y_1(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y^{(n)} + P_1(x).y^{(n-1)} + P_2.y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}.y' + P_n(x).y = 0 \ldots (1)$$

فإنّ $c.y_1$ هو أيضاً حلاً لها حيث c ثابت كيفي.

مبرهنة (3):

إذا كان التابعان: $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية (1)

فان حاصل جمع التابعان أيّ: $y_1 + y_2$ هو أيضا ً حل للمعادلة التفاضلية (1) .

نستنتج من المبرهنتين السابقتين (2) و(3):

أنّه إذا كان $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً للمعادلة التفاضلية (1) فإنّ التابع:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i.y_i = c_1.y_1 + \cdots + c_n.y_n$$

يكون حلاً لها أيضاً.

مبرهنة (4):

إذا كانت معاملات المعادلة الخطية (1): $P_i(x); i = 1,2, \ldots, n$ توابع حقيقية وإذا كانت المعادلة تقبل حلاً مركباً من الشكل: $y(x) = u(x) + i.v(x); i^2 = -1$ فإنّ كلاً من $u(x)$ الحقيقي و $v(x)$ التخيلي هو حلاً للمعادلة (1)

جملة الحلول الأساسية

تعريف: إذا كانت جملة التوابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية (1) وإذا كانت جملة التوابع مستقلة خطياً فندعوها جملة الحلول الأساسية للمعادلة التفاضلية (1).

مبرهنة (5): إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ جملة حلول أساسية للمعادلة (1) وإذا كانت المعاملات $P_i(x)$ توابع مستمرة على مجالها فإنّ محدد رونسكي $w(x) \neq 0$.

وظيفة "سيتم ادراجهم هنا للحفاظ على ترتيب أفكار المادة"

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots (1)$$

إذا علمت أنّ لها حلولاً خاصة من الشكل: $y = e^{ax}$

الحل

$$y = e^{ax}\,, y' = a.e^{ax}\,, y'' = a^2.e^{ax}$$

والآن نعوض بالمعادلة (1) فنحصل على:

$$a^2.e^{ax} - 3a.e^{ax} + 2e^{ax} = 0 \Rightarrow e^{ax}(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$e^{ax} \neq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0$$

$$ei: a = 2, or: a = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{x}, y_2 = e^{2x}$$

فإنّ محدد رونسكي يكون: $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$ فإنّ الحل العام من الشكل:

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 \Rightarrow y = c_1.e^{x} + c_2.e^{2x}$$

مثال: أوجد الحل العام:

$$(x-1).y'' - x.y' + y = 0 \dots (1)$$

علماً أنّ تقبل حلين خاصين من الشكل: $y_1 = x, y_2 = e^x$.

الحل

$$y_1 = x\,, y_1' = 1, y_1'' = 0 \xrightarrow{\text{بالتعويض}} (x-1)0 - x(1) + x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$y_2 = e^x, y_2' = e^x, y_2'' = e^x \xrightarrow{\text{بالتعويض}} (x-1)e^x - x.e^x + e^x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

فإنّ محدد رونسكي يكون: $\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} \neq 0$

ويكون الحل العام هو: $y = c_1.x + c_2.e^x$.

انتهت المحاضرة

إعداد: ماريا عيد*علا الدالاتي*عبير خزنة كاتبي