نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: تبولوجيا الأعداد العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمفاهيم طوبولوجية على ساحة الأعداد العقدية

٢ـأمثلة و تطبيقات .

تبولوجيا الأعداد العقدية

رأينا سابقاً أن $\mathbb{C}$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$

لنعرف على $\mathbb{C}$ التابع الذي يقرن كل عدد عقدي z بطويلته $|z|$:

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

$$z \longmapsto |z| = \sqrt{(Re z)^2 + (Im z)^2}$$

إن هذا التابع يعرف نظيماً على $\mathbb{C}$ ومنه :

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$يعد فضاء منظم لأنه يحقق شروط النظيم :

$$1)\ \ |z| \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{(Re z)^2 + (Im z)^2} \geq 0$$

$$2)|z| = 0 \leftrightarrow \sqrt{(Re z)^2 + (Im z)^2} = 0 \leftrightarrow (Re z)^2 + (IM z)^2 = 0$$

مجموع مقدارين غير سالبين يساوي الصفر فحتماً أن كل منهما يساوي الصفر

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} (Re z)^2 = 0 \\ (Im z)^2 = 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} Re z = 0 \\ Im z = 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow z = 0$$

$$3)\ \ |\lambda z| = \sqrt{(\lambda Re z)^2 + (\lambda Im z)^2} = \sqrt{\lambda^2[(Re z)^2 + (Im z)^2]}$$

$$= |\lambda|\sqrt{(Re z)^2 + (Im z)^2} = |\lambda||z|$$

4) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$فضاء منظم $\longleftarrow$ متراجحة مثلث

ونعلم أنه كل فضاء منظم هو فضاء متري لكن العكس غير صحيح بالضرورة

$d(\mathfrak{z}_1 , \mathfrak{z}_2) = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$ وهذه المسافة هي نفسها المسافة المألوفة

إذاً أصبح الفضاء $\mathbb{C}$ فضاء تبولوجي لكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

تعرف المسافة المشتقة من النظيم على هذا الفضاء بالمساواة التالية : $d\,(\mathfrak{z}_1 , \mathfrak{z}_2) = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$

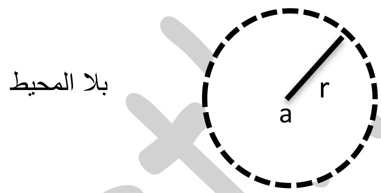
المسافة بين عنصرين هو نظيم الفرق بينهما .

بعض المفاهيم التبولوجية في $\mathbb{C}$

1 **القرص المفتوح :** لتكن $r > 0$ و a ثابت عقدي

نسمي المجموعة $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \,:\, |\mathfrak{z} - a| < r\}$ قرصاً مفتوحاً مركزه a ونصف قطره r

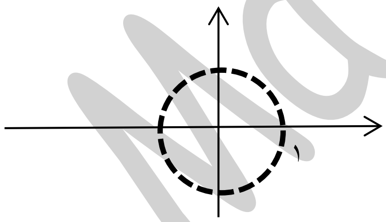
ونرمز له$D(a,r)$



من الأقراص الشهيرة :

$D(0,1)$ المعرف بالمتراجحة : $|\mathfrak{z}| < 1$

((قرص الواحدة المفتوح))



2 **جوار نقطة a :** نسمي أي قرص مفتوح مركزه a جواراً لـ a

ملاحظة : عندما نقول جوار ونسكت فنقصد به جوار مفتوح ، وبالنسبة لنا في التحليل العقدي الجوار هو قرص مفتوح مركزه نقطة ما .

أي نقطة ضمن القرص سيكون القرص جوار لها .

3 **النقطة الداخلية :** لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$, $a \in A$ نقول عن a أنها نقطة داخلية في A إذا وفقط إذا وجدله جوار محتوى في A ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية بمجموعة A° .

$$a \in A^{\circ} \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : D(a , \delta) \subseteq A$$

مثال:

لو أخذنا $\mathfrak{z} = 1 + i$ نقطة داخلية من المجموعة $A = \left\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \; ; Im\mathfrak{z} > \frac{1}{2}\right\}$ ماذا تمثل هذه المجموعة في المستوي ؟

تمثل نصف المستوي الواقع فوق المستقيم : $Im\mathfrak{z} = y = \frac{1}{2}$

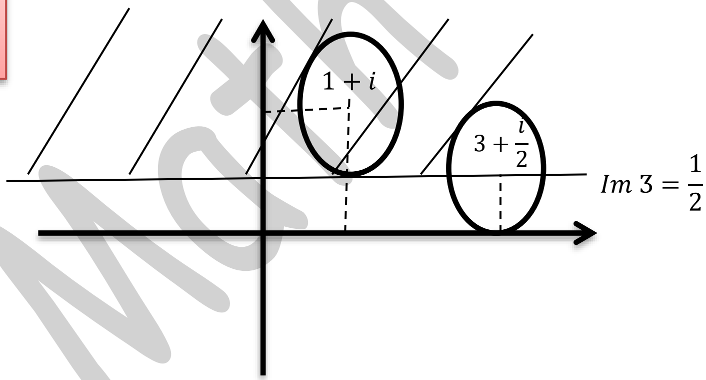
*هل النقطة $\mathfrak{z} = 3 + \frac{i}{2}$ نقطة داخلية في المجموعة A ؟

هي ليست نقطة داخلية في A لانه مهما يكن القرص الذي مركزه هذه النقطة فلن يكون محتوى بكامله ضمن المجموعة حيث إن نصفه السفلي سيقع تحت المستقيم $Im\mathfrak{z} = \frac{1}{2}$

وأن النقطة $\mathfrak{z} = 1 + i$ هي نقطة داخلية لأنه يكفي أن يوجد قرص واحد مركزه هذه النقطة

$D(1 + i , \frac{1}{4}) \subseteq A$

من الواضح $A \subseteq A^{\circ}$ لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة



4 **المجموعة المفتوحة :** نقول عن مجموعة A أنها مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية فيها أي $(A \subseteq A^{\circ})$ وبما أن الاحتواء المعاكس $(A^{\circ} \subseteq A)$ محقق دوماً

$A = A^{\circ} \Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{C}$ مفتوحة

مثال: إن المجموعة $A = \left\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \; ; Im\mathfrak{z} > \frac{1}{2}\right\}$ مجموعة مفتوحة :

الإثبات : لتكن $\mathfrak{z} \in A$ نقطة كيفية :

بالتالي : $Im\mathfrak{z} - \frac{1}{2} > 0$ تمثل بعد $\mathfrak{z}$ عن المستقيم $Im\mathfrak{z} = \frac{1}{2}$

نقسم على ٢ كي نقطع الشكل أي أن الدائرة لا تمس المستقيم : $Im\mathfrak{z} = \frac{1}{2}$

مثال: إن المجموعة $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; Im z \geq \frac{1}{2} \right\}$ ليست مفتوحة:

الإثبات: حتى نبرهن أن المجموعة ليست مفتوحة يكفي أن أجد نقطة واحدة فيها وليست داخلية فيها .

إن جميع نقاط المستقيم : $Im z = \frac{1}{2}$ نقاط من B إلا أنها ليست داخلية في B وذلك لأن أي جوار سيبقى نصفه السفلي خارج المجموعة فهو غير محتوى في هذه المجموعة .

5 **المجموعة المغلقة :** نقول عن مجموعة $A \subseteq C$ أنها مغلقة إذا كانت متممتها في $\mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة :

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ مغلقة } \Leftrightarrow A^c = \mathbb{C} \backslash A \text{ مفتوحة}$$

مثال: إن المجموعة B في المثال الأخير هي مجموعة مغلقة:

لأن متممتها $B^c = \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; Im z < \frac{1}{2} \right\}$ هي مجموعة مفتوحة ونثبت ذلك بنفس اسلوب إثبات A

$$D(z, \frac{1}{2} - Im z) \subseteq B^c$$

حيث أن $Im z < \frac{1}{2}$ وكتبنا $\frac{1}{2} - Im z$ لأننا نريد نصف القطر الموجب

أما لو كتبنا $Im z - \frac{1}{2}$ لأصبح نصف القطر سالباً

ويقصد ب B^c نصف المستوي الواقع تحت المستقيم $Im z = \frac{1}{2}$ دون المستقيم .

تنويه: هناك مجموعات ليست مفتوحة وليست مغلقة في الوقت ذاته .

مثال: لتكن المجموعة $D = \{ z \in \mathbb{C} \quad ; -1 < Re\, z \ \leq 2 \}$ مثل هذه المجموعة في المستوي العقدي ثم أثبت أنها ليست مغلقة وليست مفتوحة في $\mathbb{C}$

الحل: عندما يكون $Re\, z$ أو $Im z$ محصور بين قيمتين تكون المجموعة عبارة عن شريط :

إذا كانت $Im z$ فتكون محصورة بين قيمتين فالشريط أفقي .

إذا كانت $Re\, z$ فتكون محصورة بين قيمتين فالشريط شاقولي .

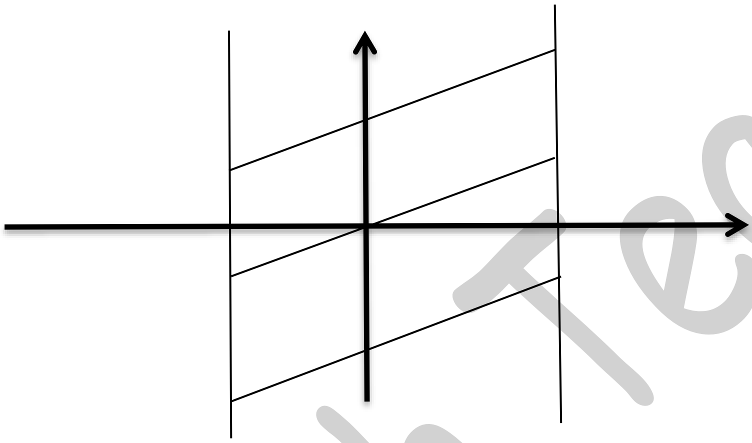
بالتالي الشريط الشاقولي محصور بين قيمتين $Re\, z = -1$ و $Re\, z = 2$ دون الحافة اليسرى .

إن كل نقطة من المستقيم $Re\ 3 = 2$ لن تكون داخلية في هذه المجموعة ((والمجموعة ليست مفتوحة)).

وأن $Re\ 3 = -1$ هي نقاط من المتممة D وهي ليست نقاط داخلية في المتممةD^c .

بالتالي إن المتممة ليست مفتوحة إذا D ليست مغلقة

ومنه المجموعة D ليست مفتوحة وليست مغلقة.



$Re\ 3 = -1$ $Re\ 3 = 2$

سنقوم بحل تمرينين قد أعطيا وظيفة في المحاضرات السابقة :

١) حل المعادلة : $3^6 + 3^3 + 1 = 0$

نفرض أن $w = 3^3$ فتصبح المعادلة من الشكل :

$$w^2 + w + 1 = 0$$

$$w_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \left[1, 4\frac{\pi}{3}\right]$$

$$w_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \left[1, 2\frac{\pi}{3}\right]$$

ومنه لنفرض أن : $\delta^3 = w_1$

$$\delta^3 = \left[1, 4\frac{\pi}{3}\right]$$

$$r^3 . \text{cis}\ 3\theta = cis\ 4\frac{\pi}{3}$$

$$r^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

$$3\theta = 4\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 4\frac{\pi}{9} + 2\frac{\pi}{3}k \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 4\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \left[1, 4\frac{\pi}{9}\right]$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 10\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \left[1, 10\frac{\pi}{9}\right]$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 16\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_3 = \left[1, 16\frac{\pi}{9}\right]$$

الان نوجد جذور w_2 :

$$\delta^3 = w_2$$

$$r^3 . \text{cis } 3\theta = cis\ 2\frac{\pi}{3}$$

$$r^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

$$3\theta = 2\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 2\frac{\pi}{9} + 2\frac{\pi}{3}k \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 2\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \left[1, 2\frac{\pi}{9}\right]$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 8\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \left[1, 8\frac{\pi}{9}\right]$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 14\frac{\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \delta_3 = \left[1, 14\frac{\pi}{9}\right]$$

٢) حل المعادلة الاتية : $3^2 + (1-3i)3 + (-2-i) = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1-3i)^2 - 4(1)(-2-i)$$

$$\Delta = 1 - 6i - 9 + 8 + 4i = -2i$$

لنفرض δجذر من المرتبة الثانية ل Δ

$$\Delta = -2i = \left[2, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$r^2 . \text{cis}\, 2\theta = 2cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad ; \quad k = 0,1$$

$$\Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad ; \quad k = 0,1,2$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-1+3i+1-i}{2} = 2\frac{i}{2} = i$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-1+3i-1+i}{2} = -\frac{2}{2} + 4\frac{i}{2} = -1+2i$$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هاله مصطفى