المحاضرة الحادي عشرة

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: اللولب والدويري

نظري ■
عملي □

* تمرين: اثبت انه لا توجد نقاط شاذة للمنحني $]-2\pi, 2\pi[\longrightarrow R^3$

$$t \longmapsto (1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$$

وان المنحني المعين بهذا التمثيل يقع على الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2، وعلى الاسطوانة $(x-1)^2+y^2=1$

الحل: ((لنثبت انه لا توجد نقاط شاذة للمنحني))

ان إيجاد نقاط شاذة للمنحني يكافئ إيجاد حلول للمعادلة $\vec{r}'(t)=0$

$$(-\sin t, \cos t, \cos\frac{t}{2}) = (0,0,0)$$

وبما ان sin و cos لا ينعدمان معاً بالتالي فإن $\vec{r}'(t)\neq 0$ بالتالي لا يوجد نقاط شاذة للمنحني.

((لنثبت ان المنحني المعين بهذا التمثيل يقع على الكرة مركزها O ونصف قطرها 2))

معادلة الكرة $x^2+y^2+z^2=4$

$$f_1=(1+\cos t)^2+\sin^2 t+(2\sin\frac{t}{2})^2$$

$$=1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+4\sin^2\frac{t}{2}=2+2\cos t+4\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)$$

$$=2+2\cos t+2-2\cos t=4=f_2$$

ومنه المركبات $\vec{r}$ تحقق معادلة كرة ومنه كل نقطة من منحني المعين بالتمثيل $\vec{r}$ تقع على الكرة المذكورة.

((لنثبت انها تقع على الأسطوانة $(x-1)^2+y^2=1$))

$$(1+\cos t-1)^2+(\sin t)^2=1$$

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1 \Longrightarrow 1=1$$

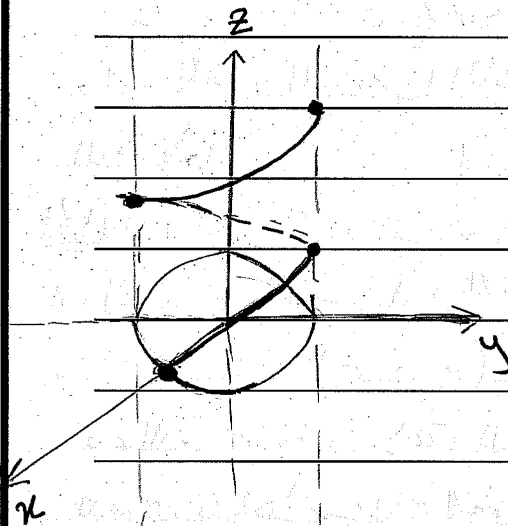
ومنه مركبات $\vec{r}$ تحقق معادلة الاسطوانة ومنه كل نقطة من المنحني المعين بالتمثيل r تقع على الاسطوانة مذكورة

((طريقة أخرى لحل الطلب الأول))

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+\cos^2(\tfrac{t}{2})} = \sqrt{1+\cos^2(\tfrac{t}{2})} \geq 1$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}(t)\| \neq 0 \Rightarrow \vec{r}(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [-2\pi, 2\pi]$$

* منحني اللولب : هو مسار نقطة تتحرك بسرعة ثابتة على مولد اسطوانة تدور بسرعة ثابتة حول محورها .



اذا زودنا الفضاء بجملة محاور احداثية بحيث ينطبق محور oz على محور الاسطوانة موجه بجهة حركة النقطة بحيث ox في الموضع للنقطة متحركة مقابلة لـ $\tau = 0$ عندئذ فإن معادلات حركة ستعطى بـ معادلة التالية

$$\vec{r} : \begin{cases} x = a\cos(w\tau) \\ y = a\sin(wt) \\ z = v\tau \qquad \tau \in R \end{cases}$$

حيث a هي نصف قطر الاسطوانة و w سرعة الزاوية للأسطوانة و v هي سرعة النسبية للنقطة على مولد .

ان التمثيل التالي هو تمثيل صحيح لذلك اللولب

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad t \in R$$

ولنثبت ذلك باثبات تكافؤ $\vec{\vec{r}}$ مع $\vec{r}$??

الدالة هي $t = \phi(\tau) = w\tau$

هي مستمرة وغامرة لأنها من $R \longrightarrow R$ وهي متزايدة

* خواص اللولب :

* ان اللولب منحني مفتوح ذلك لوجود تمثيل له معرف على مجال مفتوح

* ان اللولب من صنف C^∞ بل هو تحليلي لوجود تمثيل له تحليلي على R

لان مركبات هذا التمثيل دوال تحليلية على R

ملاحظة: دوال تحليلية على R هي التي تكتب على شكل متسلسلة

* اللولب منحني نظامي لوجود تمثيل له r قابل للاشتقاق على R بكاملها ومشتقه $r'(t)=(a\,\text{Sin}t, \text{Cos}t, b) \neq 0$ ومن المؤكد ان $b \neq 0$ لانه لو كانت $b = 0$ لن يكون هناك حركة على المحور

* ان اللولب منحني نظامي تحليلي لوجود تمثيل له وهو هذا التمثيل تحليلي والمشتق $\vec{r}'(t)$ لا يساوي الصفر $t \in R$

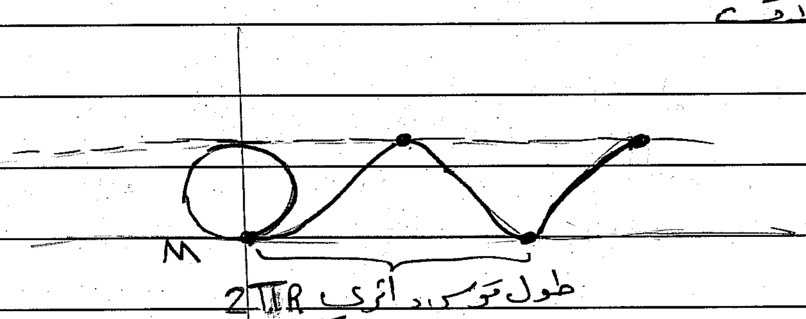
* لا يوجد نقاط شاذة للولب في هذا المثال r ان هي r قابل للاشتقاق على كامل R و مشتقه لا ينعدم عند اي نقطة في R

هل يمكن أن يوجد تمثيل آخر للولب:

لا يوجد لدينا مقدرة لمعرفة الجواب لكننا فيما بعد سنوجد الجواب.

* الدويري:

هو منحني مستوي وهو مسار نقطة من دائرة عندما تتدحرج على مستقيم دون انزلاق



ان التمثيل الآتي هو التمثيل مسموح به الدويري:

$$\vec{r}(t) = (a(t - \text{Sin}t), a(1 - \text{Cos}t), 0) \qquad t \in R$$

- الدويري منحني مفتوح لوجود تمثيل له $\vec{r}$ معرف على مجال مفتوح

* اثبت ان مركبة $x = a(t - \text{Sin}t)$ دالة متزايدة؟؟

هندسياً من الواضح انها متزايدة لان قيمة x تزداد و تحليلياً أسهل فيما بعد

* ما هي مرتبة تضاعف نقاط الدويري؟؟

هي بسيطة ان r متباينة ⟸ جميع نقاط الدويري بسيطة في هذا مثال.

- ان الدويري منحني تحليلي ذلك لان تمثيله r تحليلي على R لان مركبات هذا التمثيل جميعها تحوي دوال تحليلية على R.

* هل هنالك نقاط شاذة للدويري في $2\pi r$ ؟؟

ان التمثيل r قابل للاشتقاق على كامل R حيث ان مركباته تحليليه فلا يوجد نقاط شاذة سببها عدم وجود مشتق وبالتالي فإن نقاط الشاذة ان وجدت فهي حلول للمعادلة $r'(t) = \vec{0}$

$$\Rightarrow x' = a(1-\cos t) = 0 \underset{a>0}{\Rightarrow} \cos t = 1$$

$$\Rightarrow t = 2\pi K \quad ; K \in Z$$

$$y' = a\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = \pi K \quad K \in Z$$

$$z' = 0$$

$$\xrightarrow[\text{من } x' , y']{} t_K = 2\pi K \quad ; K \in Z$$

بالتالي نقاط شاذة ان وجدت هي نقاط الموافقة لحلول معادلة $r'(t) \Rightarrow$ النقاط الشاذة في هذا التمثيل

$$P_K = (2\pi K a, 0, 0)$$

$$\vec{OP_K} = \vec{r}(t_K) = r(2\pi K) = (2\pi K a, 0, 0) \quad K \in Z$$

★★ انتهت المحاضرة ★★