نظري

◄ دكتور المادة: وائل أبو ريشة

◄المحاضرة: السادسة ◄ عنوان المحاضرة: المستوي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة عن:

١ـ أهم المعادلات في المستوي.
٢ـ بعد نقطة عن مستوي .
٣ـ تعريف البعد.
٤ـ تمارين

حالات هامة للمعادلات في المستوي:

انطلاقا من المعادلة العامة للمستويP: $P \equiv ax + by + cz + d = 0$

نلاحظ ما يلي:

١- $a = 0$ فمعادلة المستوي تصيح من الشكل:

$$P \equiv by + cz + d = 0$$

وناظمها يكون:$\overrightarrow{N_p}(0, b, c)$ نحصل على مستوي يوازي $\acute{x}x$ لان مركبات الشعاع $\overrightarrow{N_p}$ على المحور $\acute{x}x$ معدومة وبالتالي شعاع $\overrightarrow{N_p}$ يعامد $\acute{x}x$فالمستوي Pيوازي المحور $\acute{x}x$

٢- $b = 0$ فمعادلة المستوي تصبح بالشكل:

$$P \coloneqq ax + cz + d = 0$$

وناظمها$\overrightarrow{N_p}(a, 0, c)$ عندئذ نحصل على معادلة مستوي يوازي المحور $\acute{y}y$.

٣- $c = 0$ فمعادلة المستوي تصيح من الشكل:

$$P \coloneqq ax + by + d = 0$$

ناظمها $\overrightarrow{N_p}(a, b, 0)$ عندئذ نحصل على معادلة مستوي يوازي المحور$z\acute{z}$.

٤- $d = 0$ فمعادلة المستوي تصيح من الشكل: $P \coloneqq ax + by + cz = 0$

وهي معادلة مستوي يمر بمبدأ الاحداثيات.

٥- اذا كان $a = b = 0$ فأن $P := cz + d = 0$ وهي معادلة مستوي يوازي مستوى الاحداثيات oxy

٦- $a = c = 0$ معادلة المستوي $P := ax + d = 0$ معادلة مستوي توازي مستوى الاحداثيات oyz

مثال: أوجد معادلة المستوي Pالمارة من النقطة $A(2, 6, -3)$ ويوازي المستوي oxy

الحل

بما أنه يوازي oxyفأن $a = b = 0$ فأن الناطم المستوي هو $\overrightarrow{N_p}(a, b, c)$

$$\overrightarrow{N_p} = (0, 0, \lambda) = (0, 0, 1)$$

نفرض نقطة كيفية $M(x, y, z) \in P$

$$P := \overrightarrow{N_p} * \overrightarrow{AM} = 0$$

$$(0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) = (x - 2)\vec{i} + (y - 6)\vec{j} + (z + 3)\vec{k}$$

$$\to z + 3 = 0$$

بعد نقطة عن مستوي:

لتكن نقطة من الفراغ تنتمي للفضاء الثلاثي $M_0 \in R^3$فأن حساب بعد M_0 عن المستوي P نميز حالتين: ١- $M_0 \in P$ فأن بعد $d(M_0, P) = 0$

٢-$M_0 \notin P$ ولتكن M_1 مسقط M_0 على P.

بحيث M_0 لا تقع في المستوي Pولايجاد العلاقة التي تعطي بعد نقطة M_0عن المستوي P نقوم بإيجاد النقطة M_1هي مسقط نقطة M_0 على المستوي P .

عندئذ يكون المتجه $\overrightarrow{M_1M_0}$ محمول على الناظم وبالتالي يعطي الجداء الداخلي بالشكل :

$$\overrightarrow{M_1M_0} * \overrightarrow{n_p} = \|\overrightarrow{M_1M_0}\| * \|\overrightarrow{n_p}\| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} * \overrightarrow{n_p} = d\|\overrightarrow{n_p}\| \cos\theta$$

بما أن $\overrightarrow{M_1M_0}$ محمول على $\overrightarrow{n_p}$ فان الزاوية بينهما تساوي الصفر وبالتالي $\cos\theta = 1$ ومنه:

$\overrightarrow{M_1M_0} * \overrightarrow{n_p} = d\,\|\overrightarrow{n_p}\|$

$$d = \frac{\overrightarrow{M_1M_0} * \overrightarrow{n_p}}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{oM_0} - \overrightarrow{oM_1}) * \overrightarrow{n_p}}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{oM_0} * \overrightarrow{n_p}) - (\overrightarrow{oM_1} * \overrightarrow{n_p})}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

وبما أن $\overrightarrow{oM_1} * \overrightarrow{n_p} = 0$: اذا

$$= \frac{(\overrightarrow{oM_0} * \overrightarrow{n_p}) - 0}{\|\overrightarrow{n_p}\|} = \frac{(\overrightarrow{oM_0} * \overrightarrow{n_p})}{\|\overrightarrow{n_p}\|} = \frac{|P(M_0)|}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

$$d(M_0, P) = \frac{|P(M_0)|}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

مثال: أوجد معادلة مستوي يمر من النقطة $A(6,5,-2)$ ويوازي المستوي:

$$\acute{P} = 3x - 4y + 12z - 13 = 0$$

ثم أحسب البعد بين المستويين :

الحل

$\overrightarrow{n_p}(3,-4,12)$ نفرض نقطة كيفية $M(x,u,z) \in P$

$$P \coloneqq \overrightarrow{n_p} * \overrightarrow{AM} = 0$$

$$(3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 12\,\vec{k}) * ((x-6)\vec{\imath} + (y-5)\vec{\jmath} + (z+2)\vec{k} = 0$$

$$3(x-6) - 4(y-5) + 12(z+2) = 0$$

$$P \coloneqq 3x - 4y + 12z + 26 = 0$$

احسب البعد بين المستويين :بعد عن المستويين هو بعد نقطة عن المستوي P عن المستوي $\acute{P}$

$$d(P,\acute{P}) = d(A,\acute{P}) = \frac{|\acute{P}(A)|}{\|\overrightarrow{n_p}\|}$$

$$= \frac{|18-20-24-13|}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{39}{13}$$

مثال: احسب لبعد بين المستويين:

$$P_1 = x - y + z - 2 = 0$$

$$P_2 = 2x + y - 3 = 0$$

الحل

$\overrightarrow{n_{p_2}}(2,1,0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{n_{p_1}}(1,-1,1)$

بما أن : $\frac{1}{1} - \neq \frac{1}{2}$ غير مرتبطان خطيا" يعني غير متوازيان فالبعد بينهما صفر. $d(P_1,P_2) = 0$

ملاحظة: تعريف البعد: هو أقصر مساحة بين مجموعة النقاط ونقطة.

$$d(m_0,x) = \{min(d(M_0M)) * max\}$$

$max =$ مجموعة نقاط و $\qquad$ $min =$ محموع بعد;

وظيفة

١-أوجد معادلة مستوي P يحقق $B(5,-1,7)$ هي مسقط $A(4,-2,3)$

٢-عين α,β,γالتي تجعل المستويات P_1,P_2,P_3متعامدة مثنى مثنى

$$P_1 = \alpha x - y + z - 5 = 0$$

$$P_2 = x + \beta y + z - 2 = 0$$

$$P_3 = -4x - y + \gamma z + 1 = 0$$

انتهت المحاضرة

إعداد : رغد السويد* مؤمنة أندورا *رزان عثمان تسيق: محمد أنس القزاز