نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄المحاضرة: العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: الفضاء المتري التام

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- الفضاء l^p التام
٢- الفضاء $C[a,b]$ التام
٣- مبرهنة التقارب المنتظم

الفضاء ℓ^p تام:

حيث نفترض أن P عدد مثبتاً حيث أن : $1 \leq P < \infty$

و حيث نعلم أنه على **الفضاء l^p قد عُرِّفَ** المترك التالي :

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; x = (\xi_i) \qquad y = (\eta_i)$$

ولنثبت أن ℓ^p تام : نأخذ متتالية كوشية اختيارية ونثبت أنها متقاربة في الفضاء .

ولتكن $(x_m) \in \ell^p$ متتالية كوشية حيث أن : $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \dots \dots \dots, \xi_n^m, \dots)$

عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N_0 حيث أن تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon \implies \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^m - \xi_i^n)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

نرفع للطرفين للقوة p: $\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^m - \xi_i^n)^p < \varepsilon^p$

وكون هنا المجموع هو مقادير غير سالبة و متقاربة ولا يتجاوز ε^p فإن كل مكون من مكونات هذا المجموع أيضاً سيكون أصغر من ε^p أي تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N : |\xi_i^m - \xi_i^n|^p < \varepsilon^p \qquad i = 1,2,3, \dots.$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N: \left|\xi_i^m - \xi_i^n\right| < \varepsilon \qquad i = 1,2,3, \ldots.$$

((ولنختر عدداً مثبتاً i)) : نستنتج أن $(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots \ldots \ldots \ldots.,)$ متتالية عددية عقدية أو حقيقية كوشية وبالتالي فإنها متقاربة نظراً لكون $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ تامين و لنفرض أنها متقاربة من ξ_i أي أن

$$\lim_{m\to\infty} \xi_i^m = \xi_i \Leftrightarrow \xi_i^m \longrightarrow \xi_i \,; i = 1, 2, \ldots \ldots$$

ويمكننا استخدام النهاية لتعريف العنصر x حيث : $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots \ldots., \xi_n, \ldots)$ ومن ثم إثبات أن $x \in \ell^p$ وإن $x_m \to x$

ونلاحظ أن المتسلسلة في العلاقة

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 > N; m,n \geq N_0: d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_i^m - \xi_i^n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

متقاربة حسب تعريف ℓ^p وبالتالي المجموع محدود ، فإذا أخذنا مجموع جزئي من هذا المجموع يبقى أيضاً محدود وذلك أخذنا عدد صحيح K من الحدود نستطيع أخذ النهاية إذاً أصبح لدينا :

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i^m - \xi_i^n\right)^p < \varepsilon^p$$

وبجعل $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i^m - \lim_{n\to\infty} \xi_i^n\right)^p \leq \varepsilon^p \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \left(\xi_i^m - \xi_i\right)^p \leq \varepsilon^p$$

وبجعل $k \to \infty$:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_i^m - \xi_i\right)^p \leq \varepsilon^p \quad : m > N_0$$

وهذا يبين أن $x_m - x = (\xi_i^m - \xi_i) \in \ell^p$ وبما أن $(x_m) \in \ell^p$ ومنه حسب متباينة منكوفيسكي فإن : $x = x_m + (x - x_m) \in \ell^p$

ولدينا : $\left(d(x,y)\right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_i^m - \xi_i\right)^p \leq \varepsilon^p$

وبالتالي تحقق لدينا تعريف التقارب كالتالي:

$$\forall \varepsilon = 2\varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N_0 : d(x_m, x) \leq \varepsilon < 2\varepsilon = \delta$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^m - \xi_i^n)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta$$

ومنه الفضاء ℓ^p تام بخصوص المترك المعرف عليه .

الفضاء $C[a,b]$:

((فضاء الدوال المستمرة على المجال $c[a,b]$ المغلق))

لنعرف على الفضاء المترك المحدد بالشكل:

$$d(x,y) = \max|x(t) - y(t)| \quad ,x\,,y \in c[a,b]$$

$$a \leq t \leq b$$

ولنثبت أن الفضاء $c[a,b]$ نأخذ متتالية كوشية اختيارية ونثبت تقاربها في هذا الفضاء ولتكن (x_n) متتالية كوشية فهي تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N_0\,; \max|x_n(t) - y_m(t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n(t) - y_m(t)| < \varepsilon \qquad a \leq t \leq b$$

ومن أجل $t = t_0 \in [a,b]$مثبت ، وبما أن الدوال هل دوال مستمرة ، لو رسمنا من t_0 مستقيم عامودي لقطع كل دالة من المتتالية بنقطة واحدة فقط وبالتالي يتشكل لدينا المتتالية الكوشية فهي تحقق :

$$x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots x_n(t_0)$$

أي أن : $\Rightarrow |x_n(t) - y_m(t)| < \varepsilon$

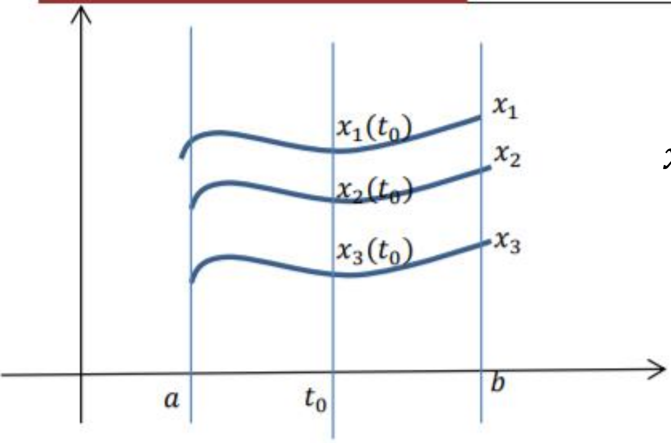
وبالتالي فإن المتتالية عددية حقيقية كوشية في R وكون R تام فإن كل كوشية فيه متقاربة في R أي أن :

$$x_m(t_0) \to x(t_0) \in R \qquad ; \quad m \to \infty$$

وبالتالي يمكننا بهذه الطريقة الحصول على متتالية كوشية في Rوهي متقاربة من نقطة وحيدة أيا كان i مثبت .

أي يكون لدينا

$$x_m(t_0) \to x(t_0) \in R \qquad ; \quad m \to \infty$$



وبالتالي تتشكل لدينا الدالة x المعرفة على $[a,b]$.

وتبقى لكي يتم المطلوب إثبات أن $x \in [a,b]$ وأن $x_m \to x$

وسنثبت أن x هي نهاية للدالة وأنها مستمرة على $[a,b]$.

ولدينا من التعريف :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_0 \in N; m,n \geq N_0 \,; \max\left|x_n(t) - x_m(t)\right| < \varepsilon$$

$$a \leq t \leq b$$

ومن أجل كل t وعندما $m \to \infty$ يكون

$$\max\left|x_n(t) - x(t)\right| < \varepsilon$$

$$a \leq t \leq b$$

وهذا يبين أن $x_n(t)$ تتقارب بانتظام من $x(t)$ على المجال $[a,b]$ فإن دالة النهاية x مستمر على $[a,b]$

وحسب مبرهنة ((إذا تقاربت x_n متتالية من الدوال المستمرة المعرفة على $[a,b]$ تقارباً منتظماً على $[a,b]$ من الدالة x فإن النهاية x هذه تكون مستمرة على $[a,b]$))

أي أن x دالة مستمرة $x \in c[a,b]$ إذا الفضاء $c[a,b]$ تاماً بخصوص المترك المعرف عليه .

مبرهنة التقارب المنتظم :

أن تقارب $x_m \to x$ في الفضاء $c[a,b]$ هو تقارب منتظم أي أن أي متتالية x_m تتقارب بانتظام على $[a,b]$ من x .

توضيح :

أي أنه إذا تقاربة متتالية في الفضاء $c[a,b]$ من العنصر x في هذا الفضاء بخصوص المترك المعرف عليه يتحقق لدينا

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \,; n \geq N_0 \,; d(x_n, x) = \max\left|x_n(t) - x_0(t)\right| < \varepsilon$$

$$a \leq t \leq b$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N ; n \geq N_0 ; d(x_n, x) = \max|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

$$a \leq t \leq b$$

وهذا يحقق تعريف شرط التقارب بانتظام لأنه لا علاقة ل ε بالموضع t لذلك سمي هذا الفضاء بالفضاء المنتظم .

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – نذير تيناوي