◄ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية ..

نظري ☑
عملي ☐

تحويل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني إلى معادلة تفاضلية عادية :

وهي طريقة جديدة لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني :

نعلم أنّ معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني من الشكل :

$$\varphi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x k(x,t).\varphi(t).dt$$

يمكننا تحويل المعادلة السابقة إلى معادلة تفاضلية عادية بدالة مجهولة وحيدة φ ، وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة مرة واحدة على الأقل بالنسبة للمتحول x ، بفرض أن الدالتين h, k مستمرتين وقابلتين للاشتقاق، سنستخدم بذلك دستور الإشتقاق :

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t).dt = \beta'(x) f(x,\beta(x)) - \alpha'(x) f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}.dt$$

حيث: $f(x,t) = k(x,t).\varphi(t)$

مثال لتكن لدينا معادلة فولتيرا التكاملية التالية:

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, \varphi(t).dt$$

أوجد حل المعادلة السابقة بتحويلها إلى معادلة تفاضلية عادية:

الحل: في المعادلة المفروضة نلاحظ أنّ :

$h(x) = \sin x$ قابلة للاشتقاق

$k(x,t) = \sin(x-t)$ قابلة للاشتقاق

ونلاحظ أنّ : $\alpha(x) = 0$ $\beta(x) = x$

نشتق طرفي المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x متغير:

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin x + \int_0^x \sin(x-t)\,\psi(t).dt\right]$$

$$\psi'(x) = \cos x + \frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)\,\psi(t).dt$$

باستخدام دستور الإشتقاق:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)\,\psi(t).dt = (1)\sin(x-x)\,\psi(x) - 0\,\sin(x-0)\,\psi(0) + \int_0^x \frac{\partial \sin(x-t)}{\partial x}\,\psi(t).dt$$

$$= \int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t).dt$$

ومنه:

$$\psi'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t).dt \quad \dots (1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}\psi'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos x + \int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t).dt\right]$$

$$\psi''(x) = -\sin x + \frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t).dt$$

باستخدام دستور الإشتقاق نجد:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t).dt = (1)\cos(x-x)\,\psi(x) - (0)\cos(x-0)\,\psi(0) + \int_0^x \frac{\partial \cos(x-t)}{\partial x}.dt$$

$$= \psi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,\psi(t).dt$$

ومنه:

$$\psi''(x) = -\sin x + \psi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,\psi(t).dt \quad \dots (2)$$

بجمع المعادلة (2) طرفاً إلى طرف في المعادلة المفروضة نجد:

$$\psi''(x) + \cancel{\psi(x)} = \cancel{\psi(x)} \Rightarrow \boxed{\psi''(x) = 0}$$

والأخيرة والتي هي معادلة تفاضلية عادية بالتابع φ والمتحول x من المرتبة الثانية والدرجة الأولى، الحل العام لها نحصل عليه بالمكاملة مباشرة:

$$\varphi''(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = c_1 \Rightarrow \varphi(x) = c_1 x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية، حيث c_1, c_2 ثوابت حرفنا تعيينها

■ من المعادلة المفروضة:

$$\varphi(0) = \sin(0) + \int_0^0 \sin(-t)\varphi(t)\,dt = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

■ من الحل الذي أوجدناه:

$$\varphi(0) = c_1(0) + c_2 \Rightarrow \varphi(0) = c_2$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$c_2 = 0$$

■ من (1) نجد:

$$\varphi'(0) = \cos 0 + \int_0^0 \cos(-t)\cdot\varphi(t)\,dt = 1 \Rightarrow \varphi'(0) = 1$$

■ ومن حل المعادلة التفاضلية لدينا:

$$\varphi'(0) = c_1$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$c_1 = 1$$

ومنه بتعويض الثوابت نجد:

$$\varphi(x) = x$$

وهو الحل العام للمعادلة التكاملية المفروضة.

تمرين: لتكن لدينا المعادلة:

$$y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt$$

هل المعادلة السابقة بتحويلها إلى معادلة تفاضلية عادية؟

الحل: إنّ المعادلة المفروضة هي معادلة من الشكل:

$$y(x) = h(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\,y(t)\,dt$$

حيث:

$h(x)=x+2\sin x-1$; $\lambda=1$, $a=0$, $k(x,t)=(x-t)$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني، نلاحظ أن الدالتين h, k قابلتين للاشتقاق.

لتحويل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية عادية بالتابع y والمتحول x نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$y'(x)=1+2\cos x-\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\,y(t).dt$$

من دستور الاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\,y(t).dt=(1)(x-x)y(x)-0(x-0)\,y(0)+\int_0^x y(t).dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\,y(t).dt=\int_0^x y(t).dt$$

ومنه:

$$y'(x)=1+2\cos x-\int_0^x y(t).dt \quad ...(1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتحول x فنجد:

$$y''(x)=-2\sin x-\frac{d}{dx}\int_0^x y(t).dt$$

باستخدام دستور الاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x y(t).dt=(1)\,y(x)-0\,y(0)+\int_0^x (0).y(t).dt=y(x)$$

ومنه:

$$y''(x)=-2\sin x-y(x)$$

$$\Rightarrow y''(x)+y(x)=-2\sin x \quad ...(2)$$

المعادلة الأخيرة ما هي إلا معادلة تفاضلية خطية عادية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى غير متجانسة الحل العام لها هو عبارة عن الحل العام للمتجانسة مضافاً لها الحل الخاص لغير المتجانسة

$$y(x)=\underbrace{y_h}_{\text{الحل العام للمتجانسة}}+\underbrace{y_p}_{\text{الحل الخاص لغير المتجانسة}}$$

ولنوجد y_h الحل العام للمتجانسة الموافقة للمعادلة المفروضة:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \dots (*)$$

المعادلة المميزة لـ * هي:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

للمعادلة المميزة جذران عقديان مختلفان وبالتالي الحلان مستقلان خطياً

وبالتالي الحل العام سيكون من الشكل:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ويكون الحل العام تركيب خطي للحلين الخاصين $\cos x$, $\sin x$

الآن لنوجد الحل الخاص لغير المتجانسة، أي لنوجد y_p:

نستخدم طريقة لاغرانج، لذلك نفرض أن الثوابت تابعة لـ x أي أن:

$$c_1 = c_1(x) \qquad c_2 = c_2(x)$$

نقوم بحل جملة المعادلتين:

$$c_1' a_1(x) + c_2' a_2(x) = 0 \quad \dots (1)$$

$$c_1' a_1'(x) + c_2' a_2'(x) = R(x) \quad \dots (2)$$

$$a_1(x) = \cos x \Rightarrow a_1'(x) = -\sin x \qquad R(x) = -2\sin x$$

$$a_2(x) = \sin x \Rightarrow a_2'(x) = \cos x$$

$$\Rightarrow c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \quad \dots (3) \qquad \times \sin x$$

$$-c_1' \sin x + c_2' \cos x = -2\sin x \quad \dots (4) \qquad \times \cos x$$

لنعين c_1', c_2' نحل (3) و (4) حلاً مشتركاً

نضرب المعادلة (3) بـ $(\sin x)$ والمعادلة (4) بـ $(\cos x)$ ونجمع المعادلتين الناتجتين:

$$c_2' \sin^2 x + c_2' \cos^2 x = -2\sin x \cos x$$

$$c_2' \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = -2\sin x . \cos x$$

$$\Rightarrow c_2' = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$$

نعوض c_1' في المعادلة (3) فنجد:

$$c_1' \cos x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow c_1' = 2\sin^2 x$$

وبالتالي الحل المشترك لـ (3) و (4) نجد أنه:

$$c_1' = 2\sin^2 x \qquad c_2' = -\sin 2x$$

ولكن:

$$c_1' = 2\sin^2 x = 1-\cos 2x \xRightarrow{\text{بالتكامل}} c_1 = x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$c_2' = -\sin 2x \xRightarrow{\text{بالتكامل}} c_2 = \frac{1}{2}\cos 2x$$

وبالتالي نجد y_p بالشكل:

"نعوض الثوابت التي أوجدناها في الحل العام المتجانسة فنحصل على الحل الخاص لغير المتجانسة"

$$y_p = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \sin x$$

$$= x\cos x - \frac{1}{2}\cos x \sin 2x + \frac{1}{2}\sin x \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x . \cos 2x - \cos x \sin 2x\right] + x\cos x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(x-2x)\right) + x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + x\cos x$$

$$\Rightarrow y_p = x\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

وهو الحل الخاص

وبالتالي يكون الحل العام:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

للحصول على الحل العام للمعادلة من المسألة المفروضة يجب علينا تعيين الثوابت c_1, c_2 لذلك نستخدم الشرط:

◄ من المعادلة المفروضة :

$$y(0) = 0 + 2\sin(0) - 1 - \int_0^0 (0-t)y(t).dt$$

$$\Rightarrow y(0) = -1$$

◄ من الحل الذي حصلنا عليه نجد :

$$y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + 0\cos(0) - \frac{1}{2}\sin(0) = c_1$$

$$y(0) = c_1$$

بالمطابقة نجد أنّ : $c_1 = -1$

■ من المعادلة المفروضة : $y'(0) \underset{\text{من }(1)}{=} 1 + 2\cos(0) - \int_0^0 y(t).dt$

$$= 1 + 2 = 3 \Rightarrow y'(0) = 3$$

⇐ الآن باشتقاق الحل الذي حصلنا عليه بالنسبة للمتحول x :

$$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x + (1)\cos x - x\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{1}{2}\cos x - x\sin x$$

■ $\Rightarrow y'(0) = -c_1\sin(0) + c_2\cos(0) + \frac{1}{2}\cos(0) - (0).\sin(0)$

$$\Rightarrow y'(0) = c_2 + \frac{1}{2}$$

بالمطابقة نجد أنّ : $3 = c_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{5}{2}$

وبالتالي الحل العام للمعادلة التكاملية المفروضة هو :

$$y(x) = -\cos x + \frac{5}{2}\sin x + x\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 2\sin x + (x-1)\cos x$$

وهو المطلوب ...

تمرين: حل المعادلة التكاملية الآتية بتحويلها إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$y(x) = e^x + \int_0^x y(t).dt$$

الحل: إن المعادلة المعروضة هي معادلة من الشكل:

$$y(x) = h(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\, y(t).dt$$

حيث:

$$h(x) = e^x \qquad a = 0 \qquad k(x,t) = 1 \qquad \lambda = 1$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني.

نلاحظ أن k , h قابلين للإشتقاق.

لتحويل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية عادية بالتابع y والمتحول x نشتق طرفيها بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$y'(x) = e^x + \frac{d}{dx}\int_0^x y(t).dt$$

لكن:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x y(t).dt = (1)\,y(x) - (0)\,y(0) + \int_0^x (0)\,y(t).dt = y(x)$$

ومنه:

$$y'(x) = e^x + y(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) - y(x) = e^x \quad \dots (1)$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى غير متجانسة حلها العام هو عبارة عن الحل العام للمتجانسة الموافقة لها مضافاً له الحل الخاص لغير المتجانسة.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة (1) هي:

$$y' - y = 0$$

المعادلة المميزة لها: $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

وبالتالي الحل العام للمتجانسة من الشكل:

$$y_h(x) = c_1 e^x$$

الحل الخاص لغير المتجانسة، باستخدام طريقة التفتيش، لدينا:

$$R(x) = e^x$$

وبالتالي يكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_p = A x e^x$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$y_p' = A e^x + A x e^x \quad **$$

بالتعويض في $*$ نجد:

$$(A x e^x)' - A x e^x = e^x$$

$$A e^x + A x e^x - A x e^x = e^x \Rightarrow A e^x = e^x$$

بالمطابقة نجد أن $A = 1$ ومنه:

$$y_p = x e^x$$

ومنه الحل العام لغير المتجانسة هو:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + x e^x = (c_1 + x) e^x$$

لتعيين الثابت c_1: من المعادلة المفروضة:

$$y(0) = e^0 + \int_0^0 y(t)\,dt = 1$$

من الحل الذي أوجدناه نجد:

$$y(0) = (c_1 + 0) e^0 = c_1$$

بالمطابقة نجد أن: $c_1 = 1$

ومنه الحل المعادلة المفروضة هو:

$$y(x) = (x+1) e^x$$

بطريقة أخرى يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة $y'(x)-y(x)=e^x \ldots (1)$ بالشكل:

المعادلة التفاضلية لها عامل تكميل من الشكل:

$$\mu(x)=e^{-x}$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكميل نحصل على:

$$e^{-x}y'-e^{-x}y=e^{-x}e^{x}$$

$$\Rightarrow d(e^{-x}y)=dx \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow} e^{-x}y=x+c$$

$$\Rightarrow y=xe^{x}+ce^{x}=(x+c)e^{x}$$

ونعين الثابت c بنفس الأسلوب الذي ذكرناه، نجد أن: $c=1$ ويكون الحل العام من الشكل:

$$y(x)=(x+1)e^{x}$$

تمرين: حل المعادلة التكاملية التالية بتحويلها إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$y(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$$

الحل: إن المعادلة المعطاة هي معادلة من الشكل:

$$y(x)=h(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\,y(t)\,dt$$

حيث:

$$h(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ \lambda=1\ ,\ a=0\ ,\ k(x,t)=\sin(x-t)$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة، ونلاحظ أن التابعين h,k قابلين للمفاضلة.

لتحويل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية عادية بالتابع y والمتحول x، نشتق طرفيها بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$y'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$$

لكن:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)\,y(t).dt = (1)\sin(x-x)\,y(x) - (0)\sin(x)\,y(0) + \int_0^x \cos(x-t)\,y(t).dt$$

$$= \int_0^x \cos(x-t)\,y(t).dt$$

ومنه:

$$y'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \int_0^x \cos(x-t).y(t).dt \quad \ldots(1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x فنجد:

$$y''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(2)(2x)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} + \frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)\,y(t).dt$$

$$y''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)\,y(t).dt$$

ولكن:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t).y(t).dt = (1)\cos(x-x)\,y(x) - (0)\cos(x)\,y(0) + \int_0^x -\sin(x-t)\,y(t).dt$$

$$= y(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,y(t).dt$$

ومنه:

$$(2) \ldots \quad y''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2} + y(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,y(t).dt$$

نعوض المعادلة المفروضة إلى (2) طرفاً إلى طرف نجد:

$$y''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{8x^2 - 2(1+x^2) + (1+x^2)^2}{(1+x^2)^3} = \frac{8x^2 - 2 - 2x^2 + 1 + 2x^2 + x^4}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \quad y''(x) = \frac{x^4 + 8x^2 - 1}{(x^2+1)^3} \quad \ldots(3)$$

والأخيرة ما هي إلا معادلة تفاضلية عادية بالتابع y والمتحول x من المرتبة الثانية والحل العام لها يمكن أن نحصل عليه بالمكاملة مباشرة:

c_1 ثابت المكاملة: $y'(x) = \int \frac{x^4+8x^2-1}{(x^2+1)^3}\,dx + c_1 \Longrightarrow$ بالمكاملة

لكن:

$$\int \frac{x^4+8x^2-1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x^4+2x^2+1+6x^2+6-8}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$= \int \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx + \int \frac{6x^2+6}{(x^2+1)^3}\,dx + \int \frac{-8}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx}_{I_1} + 6\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{I_2} - 8\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx}_{I_3}$$

سنستخدم دساتير التدريج:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\vdots$$

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

نكامل I_n باستخدام التكامل بالتجزئة:

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

$du = -n(x^2+1)^{-n-1}(2x).dx \Leftarrow u = (1+x^2)^{-n}$

$v = x \Leftarrow dv = dx$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int -n(x^2+1)^{-n-1}(2x)(x).dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}.dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left[\int \frac{1}{(x^2+1)^n}.dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}.dx\right]$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left[I_n - I_{n+1}\right]$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right] \quad \dots (*)$$

لكن:

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \Rightarrow I_1 = \arctan x$$

ومنه نعوض $n=1$ في $*$ فنجد:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1+x^2)} + I_1\right]$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1+x^2)} + \arctan x\right]$$

نعطي $n=2$ نجد:

$$I_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(1+x^2)^2} + 3I_2\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{3}{8}\arctan x$$

بالعودة إلى y' نجد:

$$y' = I_1 + 6I_2 - 8I_3$$

$$= \arctan x + \frac{6}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right]$$

$$- 8\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{3}{8}\arctan x\right]$$

$$\Rightarrow y' = \arctan x + \cancel{\frac{3x}{1+x^2}} + \cancel{3\arctan x} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \cancel{\frac{3x}{1+x^2}} \cancel{-3\arctan x}$$

$$\Rightarrow y' = \arctan x - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \arctan x - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + c_1$$

بالمكاملة مرة ثانية:

$$y(x) = \int \arctan x \, dx - \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx + c_1 x + c_2$$ c_2 ثابت مكاملة:

ليكن:

$$\int \arctan x \, dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}.dx$$

$$v = x \Rightarrow dv = 1.dx$$

$$\Rightarrow \int \arctan x \, dx = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2}.dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

نجري تغييراً في المتحول من الشكل:

$$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du$$

بالتعويض نجد:

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]$$

بالعودة للمتحول القديم نجد:

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{1+x^2}$$

وبالتالي:

$$y(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{1+x^2} + c_1 x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية التي حصلنا عليها:

هدفنا الآن تعيين الثوابت c_1, c_2:

◀ من المعادلة المفروضة:

$$y(0) = \frac{1}{1+(0)^2} + \int_0^0 \sin(0-t)\,y(t)\,dt = 1$$

$$\Rightarrow y(0) = 1$$

◀ من الحل الذي حصلنا عليه:

$$y(0) = (0)\arctan(0) - \frac{1}{2}\ln(0+1) + \frac{1}{1+(0)^2} + c_1(0) + c_2$$

$$= 1 + c_2$$

$$\Rightarrow y(0) = c_2 + 1$$

بالمطابقة نجد أنه:

$$1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 0$$

من (1) نجد:

$$y'(0) = \frac{-2(0)}{(1+(0)^2)^2} + \int_0^0 \cos(0-t)\, y(t)\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(0) = 0}$$

من الحل الذي حصلنا عليه:

$$y'(x) = (1)\arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$+ \frac{0 - 2x(1)}{(1+x^2)^2} + c_1$$

$$\Rightarrow y'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} + c_1$$

$$\Rightarrow y'(x) = \arctan x - \frac{2x}{(x^2+1)^2} + c_1$$

$$y'(0) = \arctan(0) - \frac{2(0)}{((0)^2+1)^2} + c_1 = c_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(0) = c_1}$$

بالمطابقة نجد أنه:

$$c_1 = 0$$

بتعويض الثوابت التي أوجدناها: $c_2 = 1$ $c_1 = 0$ في الحل نجد:

$$y(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{1+x^2}$$

وهو الحل للمعادلة التكاملية المعروضة

حل معادلة فولتيرا التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

تعريف: لتكن g دالة حقيقية بالمتحول t بحيث $t \in]-\infty,+\infty[$ ، ولتكن $z = x+iy$ متحول عقدي في ساحة D من المستوي xoy عندئذٍ نسمي الدالة العقدية:

$$G(z)=\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt}\, dt$$

بتحويل لابلاس للدالة $g(t)$ ونكتب ترميزاً لذلك:

$$L[g(t)] = G(z)$$

حيث L يسمى مؤثر تحويل لابلاس

- اعتماداً على التعريف السابق نحصل على:

$$g(t)=1 \Rightarrow L[1]=\frac{1}{z} \quad ; \ \mathrm{Re}\, z>0$$

$$g(t)=c \Rightarrow L[c]=\frac{c}{z} \quad ; \ c \text{ ثابت}$$

$$g(t)=e^{\lambda t} \Rightarrow L[e^{\lambda t}]=\frac{1}{z-\lambda} \quad ; \ \mathrm{Re}\, z>\mathrm{Re}\, \lambda$$

$$g(t)=\sin(at) \Rightarrow L[\sin(at)]=\frac{a}{z^2+a^2} \quad ; \ \mathrm{Re}\, z>0$$

a ثابت

$$g(t)=\cos(at) \Rightarrow L[\cos(at)]=\frac{z}{z^2+a^2} \quad ; \ a \text{ ثابت}$$

$$g(t)=\mathrm{ch}(at) \Rightarrow L[\mathrm{ch}(at)]=\frac{z}{z^2-a^2} \quad ; \ a \text{ ثابت}$$

$$g(t)=\mathrm{sh}(at) \Rightarrow L[\mathrm{sh}(at)]=\frac{a}{z^2-a^2} \quad ; \ a \text{ ثابت}$$

$$g(t)=t^n \Rightarrow L[t^n]=\frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} \quad ; \ n \geqslant 0 \ ; \ \Gamma(n+1)=n!$$

خواص تحويلات لابلاس :

1- خاصية الخطية :

طبه ثوابت : $L[a g_1(t) + b g_2(t)] = a L[g_1(t)] + b L[g_2(t)]$

2- خاصية إخراج الثابت :

بفرض أن $L[g(t)] = G(Z)$ عندئذٍ يكون :

$L[g(at)] = \frac{1}{a} G(\frac{Z}{a})$; a ثابت

3- خاصية تحويل لابلاس للمشتق من المرتبة الأولى :

بفرض أن : $L[g(t)] = G(Z)$ فإن :

$$L[g'(t)] = Z\, L[g(t)] - g(0) = Z\,G(Z) - g(0)$$

4- خاصية تحويل لابلاس للمشتق من المرتبة n :

بفرض أن $L[g(t)] = G(Z)$ عندئذٍ :

$$L[g^{(n)}(t)] = Z^n G(Z) - Z^{n-1} g(0) - Z^{n-2} g'(0) - Z^{n-3} g''(0)$$

$$- \dots - g^{(n-1)}(0)$$

5) خاصية الإزاحة الأولى :

بفرض أن $L[g(t)] = G(Z)$ عندئذٍ يكون :

$L[e^{at} g(t)] = G(Z-a)$; a ثابت

6) خاصية الضرب بـ t^n بحيث $n \geq 1$:

بفرض أن $L[g(t)] = G(Z)$ عندئذٍ يكون :

$$L[t^n g(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dZ^n}[G(Z)] = (-1)^n G^{(n)}(Z)$$

7- مبرهنة الالتفاف : (هامة ث)

تعطى بالشكل :

$$L[\int_0^t \underbrace{k(t-s)}_{\text{دالة تابعة للفرق}} \, \psi(t)\,dt] = \underbrace{L[k(t)] \cdot L[\psi(t)]}_{\text{جداء تحويلي لابلاس}}$$

▲ تحويل لابلاس العكسي : إن تعريف لابلاس العكسي باختصار يمكن صياغته كما يلي :

إذا كان تحويل لابلاس للدالة $g(t)$ هو $G(Z)$ فإن تحويل لابلاس العكسي للدالة $G(Z)$ هو :

$$L^{-1}[G(Z)] = g(t)$$

"من خواص تحويل لابلاس العكسي خاصية الخطية"

$$L^{-1}[aG_1(Z) + bG_2(Z)] = aL^{-1}[G_1(Z)] + bL^{-1}[G_2(Z)]$$: a,b ثوابت

استخدام تحويلات لابلاس في حل معادلة فولتيرا التكاملية:

لتكن لدينا معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني:

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda\int_a^t k(t,s)\,\varphi(s).ds \quad \dots(1)$$

فلنفترض أن:

نواة المعادلة التكاملية تابعة للفرق $\left\{ k(t,s) = k(t-s) \right.$ $\underline{\text{and}}$ $a=0$

((الحالة التي تكون فيها نواة المعادلة التكاملية $k(t,s)$ تابعاً للفرق بين المتحولين t,s))

ولنفرض أن:

$$L[\varphi(t)] = L[\varphi(s)] = \Psi(Z)$$
$$L[h(t)] = H(Z)$$
$$L[k(t)] = K(Z)$$

الآن لنضرب طرفي المعادلة (1) بالدالة الأسية e^{-zt} فنجد أن:

$$e^{-zt}\varphi(t) = e^{-zt}h(t) + \lambda e^{-zt}\int_0^t k(t-s)\,\varphi(s).ds$$

نكامل طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتحول t من الصفر إلى اللانهاية فنجد:

$$\int_0^\infty e^{-zt}\varphi(t).dt = \int_0^\infty e^{-zt}h(t) + \lambda\int_0^\infty e^{-zt}\left[\int_0^t k(t-s)\,\varphi(s).ds\right]dt$$

لكن: $$\int_0^\infty e^{-zt}\varphi(t).dt = L[\varphi(t)] = \Psi(Z)$$

$$\int_0^\infty e^{-zt} . h(t) . dt = L[h(t)] = H(z)$$

$$\int_0^\infty e^{-zt} \left[\int_0^t k(t-s)\, \psi(s) . ds \right] . dt \underset{\text{من تعريف لابلاس}}{=} L\left[\int_0^t k(t-s)\psi(s) . ds \right]$$

$$\underset{\text{من مبرهنة الالتفاف}}{=} L[k(t)] . L[\psi(s)] \underset{\text{من فرضنا}}{=} K(z)\, \psi(z)$$

وبالتالي بتعويض كل ما سبق في المساواة الأخيرة نجد أنّ:

$$\psi(z) = H(z) + \lambda K(z)\, \psi(z)$$

$$\Rightarrow \psi(z) - \lambda K(z) . \psi(z) = H(z)$$

$$\Rightarrow \psi(z)\, (1 - \lambda K(z)) = H(z)$$

$$\Rightarrow \psi(z) = \frac{H(z)}{1 - \lambda K(z)}$$

"أوجدنا الآن ولكن الهدف هو إيجاد $\psi^{-1}(z)$"

الآن بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي المساواة الأخيرة.

$$L^{-1}[\psi(z)] = L^{-1}\left[\frac{H(z)}{1 - \lambda K(z)} \right]$$

$$\psi(t) = L^{-1}\left[\frac{H(z)}{1 - \lambda K(z)} \right]$$

وهي تمثل معادلة فولتيرا من النوع الثاني

- ومن أجل حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول نقوم بإجراء خطوات مشابهة تماماً لما فعلناه أعلاه فنجد:

تذكرة: $h(t) = \int_0^t k(t-s)\, \psi(s) . ds$ معادلة فولتيرا من النوع الأول

$$\psi(z) = \frac{H(z)}{K(z)} \underset{\text{بأخذ التحويل العكسي}}{\Rightarrow} \psi(t) = L^{-1}\left[\frac{H(z)}{K(z)} \right]$$

تمرين (1): استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t ch(t-s)\,\varphi(s).ds$$

إن المعادلة المفروضة هي معادلة من شكل:

$$\varphi(t) = h(t) + \lambda\int_a^t k(t,s)\,\varphi(s).ds$$

حيث:

$$h(t) = 1 \quad ; \quad \lambda = 1 \quad ; \quad a = 0 \quad , \quad k(t,s) = ch(t-s)$$

وهي معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

نلاحظ أن:

$$k(t,s) = k(t-s) = ch(t-s) \Rightarrow k(t) = ch(t)$$

لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة:

$$L[\varphi(t)] = L\left[1 + \int_0^t ch(t-s)\,\varphi(s).ds\right]$$

من الخاصية الخطية $\Rightarrow$

$$L[\varphi(t)] = L[1] + L\left[\int_0^t ch(t-s)\,\varphi(s).ds\right] \quad \dots(1)$$

نفرض أن:

$$L[\varphi(t)] = L[\varphi(s)] = \psi(z)$$

نعلم أن:

$$L[1] = \frac{1}{z}$$

$$L\left[\int_0^t ch(t-s)\,\varphi(s).ds\right] = L[ch(t)].L[\varphi(s)]$$

من مبرهنة الالتفاف

$$= \frac{z}{z^2-1}.\psi(z)$$

من كل ما سبق في (1) نجد:

$$\psi(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2-1}\,\psi(z)$$

$$\psi(z) - \frac{z}{z^2-1}\,\psi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \psi(z)\left(1-\frac{z}{z^2-1}\right)=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \psi(z)\left(\frac{z^2-z-1}{z^2-1}\right)=\frac{1}{z} \Rightarrow \psi(z)=\frac{z^2-1}{z(z^2-z-1)}$$

لنحول الكسر الأخير:

$$\frac{z^2-1}{z(z^2-z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+c}{z^2-z-1}$$

نوحد المقامات ونحذف:

$$z^2-1=(A+B)z^2+(c-A)z-A$$

بالمطابقة نجد:

$$A+B=1 \quad ; \quad c-A=0 \quad , \quad -A=-1$$

$$\Rightarrow A=1 \ , \ B=0 \ , \ c=1$$

ومنه:

$$\psi(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2-z-1}$$

بأخذ التحويل العكسي:

$$L^{-1}[\psi(z)]=L^{-1}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2-z-1}\right]$$

$$\xRightarrow{\text{من خاصية الخطية}} L^{-1}[\psi(z)]=L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{z^2-z-1}\right]$$

لكن:

$$L[1]=\frac{1}{z} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]=1$$

$$L^{-1}[\psi(z)]=\psi(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{z^2-z-1}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right]$$

نعلم أن:

$$L\left[Sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right] = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{z^2-\frac{5}{4}} \Rightarrow L\left[e^{\frac{1}{2}t}Sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right] = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}$$

"من خاصية الإزاحة الأولى"

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right] = e^{\frac{1}{2}t}Sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right] = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}t}Sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)$$

بتعويض كل ما سبق في (2) نجد:

$$\psi(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}t}Sh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)$$

وهو حل المعادلة المفروضة ...

تمرين (2): أوجد حل المعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول التالية:

$$\int_0^t \sin(t-s)\,\psi(s)\,ds = \sin^2 t$$

الحل نلاحظ أن:

$$k(t,s) = k(t-s) = \sin(t-s) \Rightarrow k(t) = \sin t$$

لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة:

$$L\left[\int_0^t \sin(t-s)\,\psi(s)\,ds\right] = L[\sin^2 t] \quad \dots(1)$$

بفرض أن:

$$L[\psi(s)] = \Psi(z)$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \Rightarrow L[\sin^2 t] = L\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(L[1] - L[\cos 2t]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)$$

ومنه:

$$L[\sin^2 t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)$$

$$L\left[\int_0^t \sin(t-s)\,\psi(s)\,ds\right] = L[\sin t]\cdot L[\psi(s)]$$

مبرهنة الالتفاف

$$= \frac{1}{z^2+1}\,\psi(z)$$

بتعويض كل ما سبق في (1) نجد

$$\frac{1}{z^2+1}\,\psi(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2+1}\,\psi(z) = \frac{2}{z(z^2+4)}$$

$$\Rightarrow \psi(z) = \frac{2z^2+2}{z(z^2+4)}$$

لنفرق لكسر ابتدائي:

$$\frac{2z^2+2}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+4}$$

نوحد المقامات ونختزل

$$\Rightarrow 2z^2+2 = A(z^2+4) + z(Bz+C)$$

$$\Rightarrow 2z^2+2 = z^2(A+B) + z(C) + 4A$$

بالمطابقة نجد أن:

$$A+B=2 \qquad C=0 \qquad 4A=2$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{3}{2} \qquad C=0$$

ومنه:

$$\psi(z) = \frac{1}{2z} + \frac{\frac{3}{2}z}{z^2+4}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\psi(z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{2z} + \frac{\frac{3}{2}z}{z^2+4}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}[\psi(Z)] = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] + \frac{3}{2} L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2+4}\right] \quad \ldots (2)$$

$$L[1] = \frac{1}{Z} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{Z}\right] = 1$$

$$L^{-1}[\psi(Z)] = \psi(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{Z}{Z^2+4}\right] = \cos 2t$$

بتعويض كل ماسبق في (2) نجد:

$$\psi(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi(t) = \frac{1}{2}(1+3\cos 2t)}$$

وهو الحل للمعادلة المفروضة

تمرين (3): باستخدام تحويلات لابلاس حل المعادلة التكاملية التالية

$$\psi(t) - \int_0^t (t-u)\,\psi(u).du = \sin t$$

الحل: إن المعادلة المفروضة تكتب بالشكل:

$$\psi(t) = \sin t + \int_0^t (t-u)\,\psi(u).du$$

والأخيرة هي معادلة من الشكل:

$$\psi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t k(t,u)\,\psi(u).du$$

حيث:

$$h(t) = \sin t \quad , \quad a=0 \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad k(t,u) = (t-u).$$

وهي معادلة فولتيرا من النوع الثاني.

نلاحظ أن: $k(t,u) = k(t-u) = t-u \Rightarrow k(t) = t$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة نجد:

$$L[\psi(t)] = L\left[\sin t + \int_0^t (t-u).\psi(u).du\right]$$

$$\Rightarrow L[\psi(t)] = L[\sin t] + L\left[\int_0^t (t-u)\ \psi(u).du\right] \quad ...(1)$$

نفرض أنّ:

$$L[\psi(t)] = L[\psi(u)] = \psi(Z)$$

نعلم أنّ:

$$L[\sin t] = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$L\left[\int_0^t (t-u)\ \psi(u).du\right] = L[t].\psi(Z)$$

من مبرهنة الالتفاف

لكن:

$$L[t] = \frac{\Gamma(2)}{Z^2} = \frac{1}{Z^2}$$

وبالتالي:

$$L\left[\int_0^t (t-u)\ \psi(u).du\right] = \frac{1}{Z^2}.\psi(Z)$$

نعوض كل ما سبق في (1) فنجد:

$$\psi(Z) = \frac{1}{Z^2+1} + \frac{1}{Z^2}\ \psi(Z)$$

$$\Rightarrow \psi(Z) - \frac{1}{Z^2}\psi(Z) = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$\Rightarrow \psi(Z)\left[1 - \frac{1}{Z^2}\right] = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$\left(\frac{Z^2-1}{Z^2}\right)\psi(Z) = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$\psi(Z) = \frac{Z^2}{(Z^2-1)(Z^2+1)}$$

لنقوم بتفريق الكسر الأخير:

$$\frac{Z^2}{(Z^2-1)(Z^2+1)} = \frac{AZ+B}{Z^2-1} + \frac{CZ+D}{Z^2+1}$$

نوحد المقامات ونختزل:

$$\Rightarrow Z^2 = (AZ+B)(Z^2+1) + (CZ+D)(Z^2-1)$$

$$\Rightarrow Z^2 = (A+C)Z^3 + (B+D)Z^2 + (A-C)Z + B-D$$

بالمطابقة نحصل على:

$$A+C=0 \quad B+D=1 \quad A-C=0 \quad B-D=0$$

$$\Rightarrow A=C=0 \quad , \quad B=D=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \frac{\frac{1}{2}}{Z^2-1} + \frac{\frac{1}{2}}{Z^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\psi(Z)] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{Z^2-1} + \frac{\frac{1}{2}}{Z^2+1}\right]$$

من خاصية الخطية:

$$L^{-1}[\psi(Z)] = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2-1}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2+1}\right] \quad \ldots (2)$$

لكن:

$$L^{-1}[\psi(Z)] = \psi(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2-1}\right] = Sh(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2+1}\right] = Sin(t)$$

بتعويض ما سبق في (2) نجد:

$$\psi(t) = \frac{1}{2} Sh(t) + \frac{1}{2} Sin(t) = \frac{1}{2}(Sh t + Sin t)$$

وهو الحل للمعادلة المعروضة.

تمرين (4): حل المعادلة التكاملية التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\psi(t) = t - \int_0^t e^{t-s}\,\psi(s).ds$$

الحل: إن المعادلة السابقة هي معادلة من الشكل:

$$\psi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)\,\psi(s).ds$$

حيث:

$$h(t) = t \quad , \quad a = 0 \quad , \quad \lambda = -1 \quad , \quad k(t,s) = e^{t-s}$$

نلاحظ أنّ:

$$k(t,s) = k(t-s) = e^{t-s} \Rightarrow k(t) = e^t$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المعروضة فنجد:

$$L[\psi(t)] = L\left[t - \int_0^t e^{t-s}\,\psi(s).ds\right]$$

$$\Rightarrow L[\psi(t)] = L[t] - L\left[\int_0^t e^{t-s}\,\psi(s).ds\right] \quad ...(1)$$

نعرف أنّ:

$$L[\psi(t)] = L[\psi(s)] = \Psi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[t] = \frac{1}{z^2}$$

$$L\left[\int_0^t e^{t-s}.\psi(s).ds\right] = L[e^t].L[\psi(s)] = \frac{1}{z-1}\,\Psi(z)$$

من مبرهنة الالتفاف

نعوض كل ما سبق في (1) فنجد:

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z-1}\,\Psi(z)$$

$$\Rightarrow \psi(Z)\left[1+\frac{1}{Z-1}\right]=\frac{1}{Z^2}$$

$$\Rightarrow \psi(Z)\left(\frac{Z}{Z-1}\right)=\frac{1}{Z^2}$$

$$\Rightarrow \psi(Z)=\frac{Z-1}{Z^3}=\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{Z^3}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[\psi(Z)]=L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{Z^3}\right]$$

$$L^{-1}[\psi(Z)]=L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{Z^3}\right] \quad \dots(2)$$

لكن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2}\right]=t$$

$$L^{-1}[\psi(Z)]=\psi(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{2}{Z^3}\right]=2L^{-1}\left[\frac{1}{Z^3}\right]=t^2$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{Z^3}\right]=\frac{1}{2}t^2$$

ومنه بتعويض ما سبق في (2) نجد:

$$\psi(t)=t-\frac{1}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \psi(t)=t\left(1-\frac{1}{2}t\right)$$

وهو حل المعادلة التكاملية المفروضة.

تمرين (5): حل المعادلة التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\psi(t) = 1-2t+4t^2 + \int_0^t [3+6(t-s)-4(t-s)^2]\,\psi(s).ds$$

الحل: إن المعادلة السابقة هي معادلة من الشكل:

$$\psi(t) = h(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\,\psi(s).ds$$

حيث:

$$h(t) = 1-2t-4t^2 \quad ; \quad k(t,s) = 3+6(t-s)-4(t-s)^2$$

$$\lambda = 1 \quad ; \quad a=0$$

نلاحظ أن:

$$K(t,s) = K(t-s) = 3+6(t-s)-4(t-s)^2$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة فنجد:

$$L[\psi(t)] = L\left[1-2t+4t^2 + \int_0^t [3+6(t-s)-4(t-s)^2]\,\psi(s).ds\right]$$

$$(1)\ldots \quad L[\psi(t)] = L[1] - 2L[t] - 4L[t^2] + L\left[\int_0^t k(t,s).\psi(s).ds\right]$$

نفرض أن: $L[\psi(t)] = L[\psi(s)] = \Psi(Z)$

ونعلم أن:

$$L[1] = \frac{1}{Z} \quad , \quad L[t] = \frac{1}{Z^2}$$

$$L[t^2] = \frac{1}{Z^3}$$

نعوض كلاما سبق في (1) فنجد أن:

$$\Psi(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{8}{Z^3} + \left(\frac{3}{Z} + \frac{6}{Z^2} - \frac{8}{Z^3}\right)\Psi(Z)$$

$$\Psi(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{8}{Z^3} + \left(\frac{3Z^2+6Z-8}{Z^3}\right)$$

$$\Rightarrow \psi(Z) - \left(\frac{3Z^2+6Z-8}{Z^3}\right)\psi(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{8}{Z^3}$$

$$\Rightarrow \psi(Z)\left(1 - \frac{3Z^2+6Z-8}{Z^3}\right) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{8}{Z^3}$$

$$\psi(Z)\left(\frac{Z^3-3Z^2+6Z+8}{Z^3}\right) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{8}{Z^3}$$

$$\psi(Z)\left(\frac{Z^3-3Z^2+6Z+8}{\cancel{Z^3}}\right) = \frac{Z^2-2Z-8}{\cancel{Z^2}}$$

$$\psi(Z) = \frac{Z^2-2Z-8}{Z^3-3Z^2-6Z+8} = \frac{\cancel{(Z^2-2Z-8)}}{(Z-1)\cancel{(Z^2-2Z-8)}}$$

$$\psi(Z) = \frac{1}{Z-1}$$

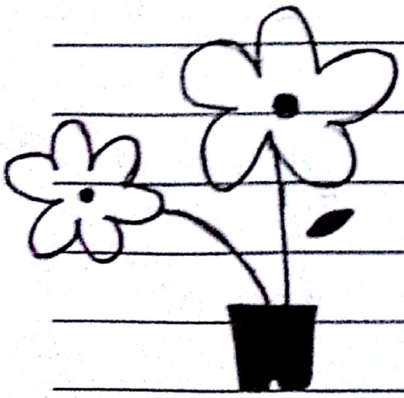
بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\psi(Z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Z-1}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(t) = e^t} \rightarrow$$ وهو الحل للمعادلة المعطاة

انتهت المحاضرة...

إعداد: إيناس إسماعيل



"إن أفضل وقت لغرس شجرة تستمتع بها الآن كان قبل عشر سنوات، وثاني أفضل وقت لغرس شجرة هو الآن"

المثل صيني!!