نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـأمثلة عن متتاليات التوابع.

٢ـتعريف متسلسلة التوابع.

توضيح من الدكتور على تمرين تم إعطاؤه في المحاضرة السادسة :

ادرس تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ حيث :

$$0 < p < q < 1 \quad \text{و} \quad x \in \mathbb{S} = [p, q] \quad \text{و} \quad f_n(x) = x^n$$

نأخذ نهاية المتتالية :

$$f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{كون } ((1 > x))$$

إذاً المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$ لنثبت أنها متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$:

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث يتحقق :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

لنوجد قيمة n من المتراجحة $x^n < \varepsilon$:

$$x^n < \varepsilon \Rightarrow ln\, x^n < ln\, \varepsilon$$

$$n\, ln\, x < ln\, \varepsilon \Rightarrow n > \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, x} \quad : \quad \forall\, x \in \mathbb{S}$$

ولكن بما أن $ln\, x$ مقدار سالب(لأنه محصور بين الصفر والواحد) نقلب إشارة المتراجحة فيصبح:

$$n > \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, x} \geq \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, q} \quad ; \quad x \in [p, q]$$

يجب أن لا يوجد علاقة بين x و n ونريد تصغير الكسر لذلك نكبر المقام ويكون ذلك بأخذ $x = q$

يوجد كل $\varepsilon > 0$ عدد N يحقق أنه عندما $n > N_0(\varepsilon) = max\left(1, \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, q}\right)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

المتتالية متقاربة بانتظام.

مثال : ادرس تقارب المتتالية : $f_n(x) = \frac{n\,x}{1+n^2x^2}$ حيث $x \in \mathbb{S} = [1, \infty[$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,x}{1+n^2x^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in[1,\infty[} \left|\frac{n\,x}{1+n^2x^2}\right| = 0$$

توضيح الحدود هي :

$$\frac{n}{1+n^2}, \frac{2n}{1+4n^2}, \frac{3n}{1+9n^2}, \dots\dots, \to 0_{n\to\infty}$$

فالمتتالية متقاربة بانتظام.

متسلسلات التوابع

لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حدودها :

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\dots, f_n(x), \dots\dots$$

نسمي المجموع اللانهائي $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع حقيقية معرفة على $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ حدها العام $f_n(x)$ نشكل متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$ حيث :

$$s_1 = f_1(x), s_2 = f_1(x) + f_2(x), \dots\dots, s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

◄تعريف :

نقول عن متسلسلة التوابع الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على $\mathbb{S}$ أنها متقاربة نقطياً إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة (نقطياً) من المجموع $s(x)$ ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s\,(x)$$

وتكون المتسلسلة متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ $\Leftrightarrow$ كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$

نتائج:

١-إذا كانت $lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$ فإن المتسلسلة متباعدة.

٢-إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ فإنها متقاربة نقطياً على $\mathbb{S}$.

٣-إذا كانت المتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام و $\sum f_n(x)$ متقاربة نقطيا على $\mathbb{S}$ فإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى للصفر عندما $n \to \infty$ أي :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

الإثبات :

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)$$

$$s_{n-1}(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)$$

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$$

والمتسلسلة متقاربة $\Leftarrow$ $lim_{n\to\infty} s_n(x) = s$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s - s = 0$$

٤-إذا سعى الحد العام الى الصفر $lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ لمتسلسلة توابع فإنها ليس بالضرورة أن تكون متقاربة على $\mathbb{S}$.

مثال : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ حدها العام $\frac{1}{n}$ يسعى للصفر ولكنها متباعدة .

٥- مجموع القيم x التي تتقارب من أجلها المتسلسلة ندعوها منطقة تقارب المتسلسلة.

مثال : حدد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

حيث $x \in \mathbb{R}$ وأوجد مجموعها في منطقة تقاربها .

نلاحظ أنها متسلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = x$ ومجموعها النوني :

$$s_n(x) = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

الشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|x| < 1$ أي $x \in]-1,1[$

ومجموعها :

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{a}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

مثال : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$ ثم أوجد مجموعها .

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^2 \underbrace{\left(1 + x + \cdots + x + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n + \cdots\right)}_{=\frac{1}{1-x}}$$

متقاربة من أجل : $1 > x > -1$ $\quad = x^2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2}{1-x}$

$$s = \frac{x^2}{1 - x}$$

نلاحظ أن مجموع المتسلسلة يتغير عند حذف الحدين اللذين دليلهما $(n = 1 , n = 0)$ أول حدين من المتسلسلة السابقة .

مثال : $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^2$

نلاحظ أن الحد العام لا يسعى إلى الصفر وذلك من أجل $x \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx^2 = \infty$$

والمتسلسلة متباعدة ، ولكن عندما $x = 0$ يصبح الحد العام صفراً وبالتالي تكون المتسلسلة المعطاة صفرية ومتقاربة ومجموعها صفر

مثال : حدد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية :

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k (1-x) = \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k-1})$$

$$= (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots\cdots + (x^n - x^{n+1}) = x - x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1})$$

$$= \begin{cases} -\infty & ; \quad x > 1 \\ 0 & ; \quad x = 1 \\ x & ; \quad -1 < x < 1 \\ \text{غيرموجودة} & ; \quad x = -1 \\ \text{غيرموجودة} & ; \quad x < -1 \end{cases}$$

إذاً تتقارب متتالية المجاميع الجزئية فقط :

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s_n(x) = \begin{cases} x & ; \quad -1 < x < 1 \\ 0 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

نجدا أن $s_n(x)$ متقاربة على المجال $]-1,1]$ فالمتسلسلة المعطاة متقاربة نقطياً في المجال $]-1,1]$

مثال : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

الحل:

إن المتسلسلة المعطاة متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{x-1}{x+1}$ وتكون متقاربة فقط إذا كان

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \qquad \text{أي} \qquad -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \ \cdots\cdots *$$

١- إذا كان $x+1>0$ $\Leftarrow$ $-1-x<x-1<x+1$

(قسمنا طرفي المتراجحة (*) على $x+1$ مقدار موجب لانقلب إشارة المتراجحة)

$x+1>x-1 \Rightarrow -1<1$ محققة دوماً

$-1-x<x-1 \Rightarrow 0<2x \Rightarrow 0<x$

٢- إذا كان $x+1<0$ $\Leftarrow$ $-1-x>x-1>x+1$

$x+1<x-1 \Rightarrow -1>1$ غير محققة

$-1-x>x-1 \Rightarrow 0>2x \Rightarrow 0>x$

إذا كانت $x<0$ لنفرض أن $x=-y$

$$\Rightarrow 1<\frac{y+1}{y-1}=\left|\frac{-y-1}{-y+1}\right|=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

بالتالي تكون المتسلسلة متباعدة إذاً تتقارب المتسلسلة في المجال $]0,+\infty[$

للاطلاع : (بعض خواص متسلسلات التوابع)

- إذا كان $lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متباعدة
- إذا حذفنا عدد منته من الحدود في بداية المتسلسلة أو أضفنا عدد منته من الحدود فلا يتغير تقارب المتسلسلة أو تباعدها لكن يتغير المجموع .
- إذا كانت $f_n(x)$ متتالية متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متباعدة .

((مرغمون أحياناً أن ندوس على عقبات مؤلمة لنصل ... وبعدها سننسى تلك العقبات))

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

تسيق: ولاء الأخضر