

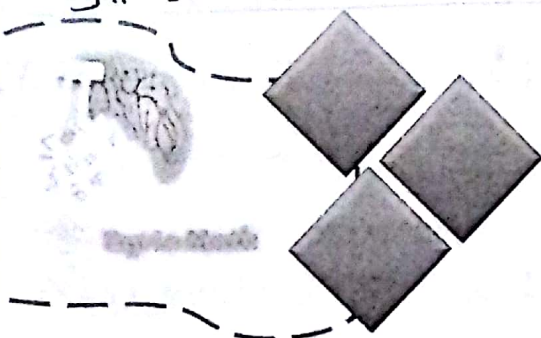
المحاضرة الثامنة

◀ دكتورة الملائكة: نور غازية

◀ عنوان المحاضرة: التمديد الجبري

٢٠١٨/١٠/٢٤

<input checked="" type="checkbox"/>	نظري
<input type="checkbox"/>	عملي



المحتوى العلمي

- 1- العناصر الجبرية والعناصر المتسامية.
- 2- التمديد المنتزح و التمديد الجبري.

تعريف العناصر الجبرية والعناصر المتسامية:

ليكن  $K$  مقدر  $L$  ممدول  $K$  ,  $a \in L$  عندها

$$f_a: K[X] \rightarrow L$$

$$f(x) \rightarrow f(a)$$

تساكي ملقي وبالتالي  $\ker(f_a)$  مثالي في  $K[X]$  نفيها البتة.

•  $\ker(f_a) = 0$  عندها التوحيد محدودية من  $K[X]$  تقبل  $a$  مغزلا صوتي الحدودية الهنوية في هذه الحالة ندعو  $a$  عنصر متسام (غير جبري) على  $K$  مثال: كل  $\pi$  د  $\mathbb{Q}$  عناصر متسامية على  $\mathbb{Q}$ .

•  $\ker(f_a) \neq 0$  عندها  $\ker(f_a) = (g(x))$  في هذه الحالة ندعو  $a$  عنصر جبري على  $K$  وأن  $g(x)$  حدودية واحدة ذات الدرجة الأولى صفر (غير فزولة على  $K$ ) . نبت عناصر  $\ker(f_a)$ .

نلاحظ أن  $g(x)$  ذات الدرجة الأولى مفرد واحدة  $\iff g(x)$  غير فزولة على  $K$  «و صنعت في ذلك على كل المقادير»

\* نومن للحدودية الأهنوية من  $K[X]$  والتي تقبل  $a$  مغزلا ب  $\text{irr}(a, K)$  مثلا، أثبت أن  $\sqrt{2}$  عنصر جبري على  $\mathbb{Q}$  وأثبت أن كل  $\sqrt[3]{2}$  و  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  و  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  عناصر جبرية على  $\mathbb{Q}$ .

الحل: نلاحظ أن  $X - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[X]$  فيه  $X = \sqrt{2}$   $\Rightarrow X^2 = 2 \Rightarrow X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow \text{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = X^2 - 2$   
 $\Rightarrow \sqrt{2}$  عنصر جبري

1

②  $X = \sqrt[3]{2} \Rightarrow X^3 = 2 \Rightarrow \text{irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = X^3 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2}$  غير جبري

③  $X = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow X^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (X^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2$

$\Rightarrow (X^2 - 5)^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow \text{irr}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \mathbb{Q}) = X^4 - 10X^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$  غير جبري

④  $X = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \Rightarrow X - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (X - \sqrt{2})^3 = 2$

$\Rightarrow X^3 - 3\sqrt{2}X^2 + 6X - 2\sqrt{2} = 2$

$\Rightarrow X^3 + 6X - 2 = (3X^2 + 2)\sqrt{2}$

$\Rightarrow \text{irr}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = X^3 + 6X - 2 = (3X^2 + 2)\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  غير جبري

تعريف التمدد المنتظم والتدبير الجبري :

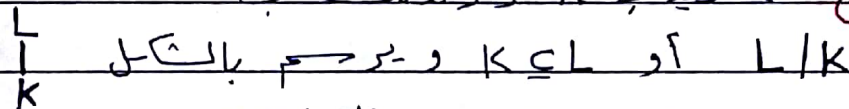
لكل  $K$  تمدد لـ  $K$  عندها :

(1) التمدد المنتظم لـ  $K \Leftrightarrow [K : \mathbb{Q}] < +\infty$

(2) نقول عن  $L$  تمدد جبري على  $K \Leftrightarrow$  كل عنصر  $a \in L$  جبري على  $K$

مثال  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  تمدد منتظم لـ  $\mathbb{Q}$  لكن  $\mathbb{R}$  تمدد غير منتظم على  $\mathbb{Q}$ .

تمديد  $L$  لـ  $K$  فوق  $\mathbb{Q}$  لانه  $\mathbb{Q}$  به



برهان :  $L/K$  تمدد منتظم لـ  $K$  و  $F$  تمدد منتظم لـ  $L$  أي

$K \subseteq L \subseteq F$  عندها  $F/K$  تمدد منتظم و

$[F : K] = [F : L] \cdot [L : K]$

البرهان كون  $F/L$  تمدد منتظم فتوجد قاعدة  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  لـ  $F$  على  $L$  أي

$\delta \in F \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in L : \delta = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$

فكندي  $K$  لـ  $L$  تمدد منتظم وبالتالي توجد  $\beta_1, \dots, \beta_m$  لـ  $L$  على  $K$  (\*)

قاعدة  $L$  على  $K$  وبالتالي  $a_i = b_{i1}\beta_1 + \dots + b_{im}\beta_m$  لكتب كتركيب خطي و هي

بدلالة عناصر  $(*)$  لـ  $K$

$a_i = b_{i1}\beta_1 + b_{i2}\beta_2 + \dots + b_{im}\beta_m : b_{ij} \in K$  لـ  $\beta_j$   $j=1, 2, \dots, m$

وبالتعريف ك نجد :  $\delta = b_{11}\beta_1\alpha_1 + \dots + b_{1m}\beta_m\alpha_1 + \dots$

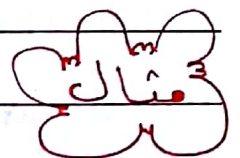
$\dots + b_{n1}\beta_1\alpha_n + \dots + b_{nm}\beta_m\alpha_n$

وهذه  $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_m, \beta_m, \alpha_n, \beta_n\}$

قاعدة  $f$  على  $K$  وهي متشعبة  $\leftarrow f: K \rightarrow K$  متشعبة وكذلك

$$[f:K] = n \cdot m = [f:L] \cdot [L:K]$$

وهو المطلوب



1- أثبت أن  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) / \mathbb{Q}$  تمديد متشعب

2- أثبت أن  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) / \mathbb{Q}$  تمديد متشعب ثم أثبت أن

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) / \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  تمديد متشعب

3- أوجد  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$

4- أوجد  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) / \mathbb{Q})$  على  $\mathbb{Q}$

5- أثبت أن  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5+\sqrt{2}})$

الحل 1- وجدنا - ابقأ أن  $\text{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = X^2 - 2$

{ وهي غير خذولة على  $\mathbb{Q}$  لأنها درجة 2 وأصغرها لا تنتمي لـ  $\mathbb{Q}$

وبالتالي  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{5}$  قاعدة لـ  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  على  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ \alpha + \beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \}$$

و  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \Leftarrow$  التمدد متشعب .

2- نفس الأسلوب نجد أن  $\text{irr}(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = X^2 - 5$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2 \Rightarrow$  التمدد متشعب .

وإن  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) / \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  تمديد متشعب كون

$$X = \sqrt{2} \Rightarrow \text{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})) = X^2 - 2$$

{ غير خذولة لأنها درجة 2 وأصغرها خارج  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2$$

3 - دالة الجبر من الدرجة الثانية

$$[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : Q] = [Q(\sqrt{5}) : Q] \cdot [Q(\sqrt{2}) : Q] = 2 \cdot 2 = 4$$

4 - ذات قاعدة  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$  على  $Q$  هي

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$$

(العبارة عن عناصر القاعدتين  $\{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$  و  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$ )

$$\alpha = a_0 \cdot 1 + a_1 \sqrt{2} + a_2 \sqrt{5} + a_3 \sqrt{10} \quad ; \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in Q$$

5 - لدينا  $\sqrt{2}, \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

$$(2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

وكون  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$  حقل فبالتالي

$$= 3\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \quad (*)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

فبالتالي  $Q \subseteq Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \quad (**)$

$$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = (\sqrt{2} + \sqrt{5}) - \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

أي  $(*)$  و  $(**)$  في

$$Q(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$$

$$\sqrt{5}, \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

ولتثبت الاستواء المعاكس

$$\Rightarrow Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

طريقة ثانية للبرهان بالاستواء

$$7 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

الأول كما سبق ولدينا

$$\text{ولكن } -7 \in Q \text{ إذاً}$$

$$[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : Q] = 4$$

$$(7 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) - 7 \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$[Q(\sqrt{2} + \sqrt{5}) : Q] = 4 \quad \text{في}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$X = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow X^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow (X^2 - 7)^2 - 40 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \text{irr}(\sqrt{2} + \sqrt{5}, Q) = X^4 - 14X^2 + 9$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

وهي غير قابلة كونه ذات الدرجة الأصغر

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})] = 1$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

اعداد: محمد الخليل البوشي