المحاضرة الثامنة

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتورة المادة: نور غازي
◄ عنوان المحاضرة: التمديد الجبري
٢٤/ ١٠/ ٢٠١٨

المحتوى العلمي :

1- العناصر الجبرية و العناصر المتسامية.
2- التمديد المنتهي و التمديد الجبري.

تعريف العناصر الجبرية و العناصر المتسامية:

ليكن K حقل و L ممدد لـ K ، $a \in L$ عندها

$$f_a : K[X] \longrightarrow L$$
$$f(x) \longmapsto f(a)$$

تشاكل حلقي وبالتالي $Ker(f_a)$ مثالي في $K[X]$ نميز حالتين

• $Ker(f_a)=0$ عندئذٍ لا توجد حدودية من $K[X]$ تقبل a صفراً لها سوى الحدودية الصفرية في هذه الحالة ندعو a عنصر متسامٍ (غير جبري)

مثال: كلاً من π و e عناصر متسامية على K على $\mathbb{Q}$.

• $Ker(f_a)\neq 0$ عندها $Ker(f_a)=(g(x))$ في هذه الحالة ندعو a عنصر جبري على K وأن $g(x)$ حدودية واحدية ذات الدرجة الأصغر (غير قابلة للتحليل على K). لبين عناصر $Ker(f_a)$.

نلاحظ أن $g(x)$ ذات الدرجة الأصغر وواحدية $\Leftrightarrow g(x)$ غير قابلة للتحليل على K.

"وسنعتمد في ذلك على حل التمارين"

* نرمز للحدودية الأصغرية من $K[X]$ والتي تقبل a صفراً لها بـ $irr(a,K)$

مثال: أثبت أن $\sqrt{2}$ عنصر جبري على $\mathbb{Q}$ وأثبت أن كلاً من $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ عناصر جبرية على $\mathbb{Q}$.

الحل: نلاحظ أن $X-\sqrt{2}\notin \mathbb{Q}[X]$ ومنه ① $X=\sqrt{2}$

$\Rightarrow X^2=2 \Rightarrow X^2-2\in\mathbb{Q}[X] \Rightarrow irr(\sqrt{2},\mathbb{Q})=X^2-2$

$\Rightarrow \sqrt{2}$ عنصر جبري

② $x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow irr(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 - 2 \Rightarrow$ جبري $\sqrt[3]{2}$

③ $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2-5)^2 = (2\sqrt{6})^2$

$\Rightarrow (x^2-5)^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow irr(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^4 - 10x^2 + 1 \Rightarrow$ عنصر جبري $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

④ $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^3 = 2$

$\Rightarrow x^3 - 3\sqrt{2}\, x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 2$

$\Rightarrow x^3 + 6x - 2 = (3x^2+2)\sqrt{2}$

$\Rightarrow irr(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 + 6x - 2 - (3x^2+2)\sqrt{2} \Rightarrow$ جبري $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

تعريف التمديد المنتهي و التمديد الجبري :

ليكن L تمديد لـ K عندها :

(1) التمديد المنتهي لـ $K \Leftrightarrow [L:K] < +\infty$

(2) نقول عن L تمديد جبري على $K \Leftrightarrow$ كل عنصر $a \in L$ جبري على K

مثال: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ تمديد منتهي لـ $\mathbb{Q}$ لكن $\mathbb{R}$ تمديد غير منتهي على $\mathbb{Q}$.

ترميز: L تمديد لـ K نرمز لذلك بـ

L/K أو $K \subseteq L$ ويرسم بالشكل $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}$

مبرهنة: L تمديد منتهي لـ K و f تمديد منتهي لـ L أي

$K \subseteq L \subseteq f$ عندها f/K تمديد منتهي و

$[f:K] = [f:L] \cdot [L:K]$

البرهان: كون f/L تمديد منتهي فتوجد قاعدة $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

لـ f على L أي

$\delta \in f \Rightarrow \exists!\, a_1, a_2, \dots, a_n \in L : \delta = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$

وكذلك L/K تمديد منتهي وبالتالي توجد $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ (*)

قاعدة L على K وبالتالي نكتب $a_i : i = 1, 2, \dots, n$ كتركيب خطي وحيد

بدلالة عناصر (*) أي

$a_i = b_{i1}\beta_1 + b_{i2}\beta_2 + \dots + b_{im}\beta_m : b_{ij} \in K, j = 1, 2, \dots, m$

وبالتعويض في δ نجد: $\delta = b_{11}\beta_1\alpha_1 + \cdots + b_{1m}\beta_m\alpha_1 + \cdots$

$\cdots + b_{n1}\beta_1\alpha_n + \cdots + b_{nm}\beta_m\alpha_n$

ومنه $\{\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \ldots, \alpha_1\beta_m, \ldots, \alpha_n\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_m\}$

قاعدة لـ F على K وهي منتهية $\Leftarrow$ $F|K$ تمديد منتهي وكذلك

$[F:K] = n.m = [F:L].[L:K]$

وهو المطلوب.

مثال

1- أثبت أن $Q(\sqrt{2})/Q$ تمديد منتهي

2- أثبت أن $Q(\sqrt{5})/Q$ تمديد منتهي ثم أثبت أن $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})/Q(\sqrt{5})$ تمديد منتهي

3- أوجد $[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}) : Q]$

4- أوجد شكل عناصر $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ على Q

5- أثبت أن $Q(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = Q(\sqrt{5},\sqrt{2})$

الحل: 1- وجدنا سابقاً أن $irr(\sqrt{2}, Q) = X^2 - 2$

{وهي غير مختزلة على Q لأنها درجة 2 وأصفارها لا تنتمي لـ Q}

وبالتالي $\{1, \sqrt{2}\}$ قاعدة لـ $Q(\sqrt{2})$ على Q

$Q(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in Q\}$

و $[Q(\sqrt{2}) : Q] = 2 \Rightarrow$ التمديد منتهي.

2- بنفس الأسلوب نجد أن $irr(\sqrt{5}, Q) = X^2 - 5$

$\Rightarrow [Q(\sqrt{5}) : Q] = 2 \Rightarrow$ التمديد منتهي.

وإن $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})/Q(\sqrt{5})$ تمديد منتهي كون

$irr(\sqrt{2}, Q\sqrt{5}) = X^2 - 2$ $\quad X = \sqrt{2} \Rightarrow$

{غير مختزلة لأنها درجة 2 وأصفارها خارج $Q(\sqrt{5})$}

$[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}), Q(\sqrt{5})] = 2$

3- حسب المبرهنة السابقة نجد أن:

$[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}):Q] = [Q(\sqrt{5}):Q]\cdot[Q(\sqrt{2}):Q] = 2\cdot 2 = 4$

4- إن قاعدة $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ على Q هي

$\{1,\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{10}\}$

(العبارة عن جداء القاعدتين $\{1,\sqrt{2}\},\{1,\sqrt{5}\}$) ومنه $\alpha \in Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$

$\alpha = a_0\cdot 1 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{5} + a_3\sqrt{10} \; ; \; a_0,a_1,a_2,a_3 \in Q$

5- لدينا $\sqrt{2},\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$

وكون $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ حقل فإن

$\sqrt{5}+\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ (*)

وإن $Q \subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ (**)

من (*) و (**) نجد

$Q(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$

ولنثبت الاحتواء المعاكس

كون $(\sqrt{2}+\sqrt{5}) \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

فإن $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$7 + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

ولكن $7 \in Q$ إذاً

$(7 + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}) - 7 \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

إذاً $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

و $\sqrt{2}+\sqrt{5} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

ومنه $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}+5\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow 2\sqrt{5}+5\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}) - 2(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow \sqrt{5} = (\sqrt{2}+\sqrt{5}) - \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

نجد مما سبق أن

$\sqrt{5},\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow Q(\sqrt{2},\sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

$\Rightarrow Q(\sqrt{2},\sqrt{5}) = Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

طريقة ثانية للحل: نبدأ بإثبات الاحتواء الأول كما سبق ولدينا

$[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}):Q] = 4$

و $[Q(\sqrt{2}+\sqrt{5}):Q] = 4$

لأن $X = \sqrt{2}+\sqrt{5}$

$\Rightarrow X^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow (X^2-7)^2 - 40 = 0$

$\Rightarrow irr(\sqrt{2}+\sqrt{5},Q) = X^4 - 14X^2 + 9$

وهي غير مختزلة كونها ذات الدرجة الأصغر

عندها $[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}) : Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})] = 1$

$\Rightarrow Q(\sqrt{2},\sqrt{5}) = Q(\sqrt{2}+\sqrt{5})$