2018 / 10 / 26

10

◄ دكتور المادة: د. محمد بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة:

نظري ☑

عملي ☐

تمرين: ليكن (X,d) فضاء متري و $\sigma(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ $\forall x,y\in X$ أثبت أن (X,σ) فضاء متري محدود:

الحل:

$\forall x,y,z\in X$

لما كان $\sigma(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ عندئذٍ:

$\sigma(x,y)=1 \quad \wedge \quad \sigma(x,y)\leq d(x,y)$

ولما كان d متركاً على X فإن $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$\Rightarrow \underbrace{\min\{1,d(x,y)\}}_{\sigma(x,y)} \leq \min\{1,d(x,z)+d(z,y)\}$

$\Rightarrow \sigma(x,y)\leq 1 \ \wedge \ \sigma(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ ★

- الآن سنناقش الحالات التالية:

- إذا كان $d(z,y)<1 \quad \wedge \quad d(x,z)<1$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\sigma(z,y)=d(z,y) \quad \wedge \quad \sigma(x,z)=d(x,z)$

بالتعويض في ★

$\sigma(x,y)\leq\sigma(x,z)+\sigma(z,y)$

وبذلك تحققت متراجحة المثلث.

- إذا كان $d(z,y)\geq 1 \quad \vee \quad d(x,z)\geq 1$

$\Rightarrow \sigma(x,y)=1 \quad \vee \quad \sigma(z,y)=1$

$\Rightarrow \sigma(x,y) \leq 1 \leq \sigma(x,z)+\sigma(z,y)$

وأيضاً تحقق شرط المتراجحة.

أما فيما يخص باقي شروط المسافة فهي محققة وضوحاً

$\Leftarrow (X,\sigma)$ فضاء متري

ولما كان $\forall x,y \in X \; ; \; \sigma(x,y) \leq 1$

$\Longrightarrow \sup\{\sigma(x,y)\} \leq \sup\{1\}=1$

$\Leftarrow (X,\sigma)$ محدود. و.هـ.م

- تعرفنا في المحاضرة السابقة عند تعريف فضاء الجداء يمكن ان نعرف تبولوجيا الجداء بشكل مختلف مكافئ للتعريف السابق.

ليكن $X_i \neq \phi$ حيث $i \in IN$ و $X=\prod_{i\in IN} X_i$ ولنعرف التطبيقات

$$Pr_i : X \longrightarrow X_i$$
$$x=(x_1,x_2,\dots) \longrightarrow x_i \quad ; i \in IN$$

• فإذا كانت X_i مزودة بالتبولوجيا τ_i وأخذنا τ أصغر التبولوجيات التي تجعل تطبيقات الإسقاط السابقة مستمرة فإن τ هي تبولوجيا على X ندعوها تبولوجيا الجداء.

- لاحظ ما يلي: Pr_i مستمر وصورة المتراصة وفق تطبيق مستمر هي متراصة ولما كان Pr_i غامر فإن $Pr_i(X)=X_i$

$\Leftarrow$ إذا كان X متراص $\Leftarrow X_i$ متراص

تعريف: ليكن $X \neq \phi$ و $X\times X$ الجداء الديكارتي لـ X مع X نعرف قطر المجموعة $X\times X$ بالشكل:

$\Delta=\{(x,x) : x\in X\} \subseteq X\times X$

فإذا كان (X,τ) فضاء تبولوجيا و $(X\times X,\tau)$ الجداء عندئذٍ

(X,τ) فضاء T_2 $\Leftrightarrow$ $\bar{\Delta}=\Delta$ في $(X\times X,\tau)$ الجداء

«القطر مجموعة مغلقة»

ملاحظة يجب التنويه لها:

نعلم أن $(\mathbb{R},\tau_{]a,b[})$ هو فضاء الأعداد الحقيقية المزود بالتبولوجيا المألوفة والتي نعلم أنها مترية إذ يوجد تابع مسافة $d(x,y)=|x-y|$ بحيث يكون كل مجموعة مفتوحة تكتب على شكل $\tau_{]a,b[}$ اجتماع لكرات مفتوحة وفق المترك d

ونعلم أيضاً أن $d_1(x,y)=|\arc\tan x-\arc\tan y|$ متركاً على $\mathbb{R}$ ويكافئ المترك d

أي أن d و d_1 يولدان نفس التبولوجيا $(\tau_{]a,b[})$ لكن !!

لأن: $(\mathbb{R},d)$ تام ، $(\mathbb{R},d_1)$ غير تام } فكيف ذلك ؟!!

إن صف المفتوحات المولدة بـ d هو نفسه صف المفتوحات المولدة بـ d_1 ذلك لأنه يمكن إيجاد تشاكل «تطبيق مستمر وتقابله العكسي مستمر» من $(\mathbb{R},d)$ إلى $(\mathbb{R},d_1)$ وهذا التشاكل من الممكن ألا يحافظ على تمام الفضاء ولكن يحافظ على المفتوحات.

- أما إذا وجد إيزومتر تقابل عندما تنتقل صفة التمام من المنطلق إلى المستقر من هذا المنطلق لنأخذ تعريف الفضاء المتري التالي:

«تشاكل الهوميومورفيزم»

الفضاء المتري: ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ، إن (X,τ) متري إذا كان هوميومورفياً مع فضاء متري.

الفضاء المترّز تماماً « الفضاء المترز والتام Completely metrisable »
(X,τ) مترز تماماً إذا كان هوموموفياً مع فضاء متري تام.

قابلية العد في الفضاءات التبولوجية.

تمهيد: لتكن $X=\mathbb{R}$ و $x=0$ و $\mathcal{V}_0$ جوارات $x=0$
إن الجماعة $\beta=\{]-\varepsilon,\varepsilon[: \varepsilon>0\}$ قاعدة لجوارات الصفر

$$V\in\mathcal{V}_0 ; \exists\varepsilon>0 , N(x,\varepsilon)\subseteq V$$

$$]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$$

كما أن $\beta_1=\{]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[; n\in\mathbb{N}^*\}$ أيضاً قاعدة لـ $\mathcal{V}_0$ وذلك لأن
حسب مسلمة أرخميدس « لكل عدد حقيقي عدد طبيعي يكبره »

$$\exists n\in\mathbb{N} \quad ; n>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[\subseteq]-\varepsilon,\varepsilon[\subseteq V$$

ونسحب ذلك أيضاً على أي فضاء متري (X,d)

$$\beta_x=\{N(x,\varepsilon) ; \varepsilon>0\}$$

قاعدة جوارات x وأيضاً

$$\beta_1=\{N(x,\frac{1}{n}) ; n\in\mathbb{N}^*\}$$

قاعدة جوارات لـ x
والفرق أن β_x غير قابلة للعد أما β_1 قابلة للعد.

تعريف (1): نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) أنه يتمتع بقابلية العد الأولى C_1
إذا كان من أجل كل $x\in X$ يوجد قاعدة لجوارات x قابلة للعد

تعريف (2): إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجيا ووجد β_2 قاعدة لـ τ
قابلة للعد قلنا إن (X,τ) يتمتع بقابلية العد الثانية C_2

- بالعودة إلى أساسيات التبولوجيا:

مبرهنة (1): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و A مجموعة جزئية من X
و $\bar{A}$ لصاقتها، عندئذٍ القضايا الآتية محققة:

1. $\overline{\phi} = \phi$
2. $A \subseteq \overline{A}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. A مغلقة $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

مبرهنة: ليكن X مجموعة ما و $K: P(X) \longrightarrow P(X)$ تطبيقاً يحقق الشروط التالية ((التي تدعى موضوعات كوراتوفسكي)) :

1. $K(\phi) = \phi$
2. $\forall A \in P(X);\quad A \subseteq K(A)$
3. $\forall A \in P(X);\quad K(K(A)) = K(A)$
4. $\forall A, B \in P(X);\quad K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$

ولنرمز بـ F للجماعة $F = \{ f : f = K(f) ; f \in P(X) \}$

أولاً: إن F مؤهلة لتوليد تبولوجيا τ على X بحيث تكون عناصر F مجموعات مغلقة بالنسبة إلى τ وبالعكس

ثانياً: $\forall A \in P(X);\quad K(A) = \overline{A}$ (لصاقة A بالنسبة لـ τ)

مبرهنة (١): لتكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً و A جزئية من X و A° داخلها عندئذٍ القضايا الآتية محققة ;

1. $X^\circ = X$
2. $A^\circ \subseteq A$
3. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
4. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
5. A مفتوحة $\Leftrightarrow A = A^\circ$

مبرهنة (2'): لتكن X مجموعة ما و $I : P(X) \longrightarrow P(X)$ تطبيقاً

يحقق ما يلي:

$\boxed{1}$ $I(X) = X$

$\boxed{2}$ $I(A) \subseteq A$

$\boxed{3}$ $I(I(A)) = I(A)$

$\boxed{4}$ $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$

لنرمز بـ τ للجماعة

$$\tau = \{ \theta ; I(\theta) = \theta : \theta \in P(X) \}$$

أولاً: τ تكون تبولوجيا على X

ثانياً: A° (داخل A بالنسبة لـ τ) : $\forall A \in P(A); \ I(A) = A^\circ$

END

إعداد

رشا رويمي

نذير تيناوي