نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الزمرة الجزئية الناظمية

المحتوى العلمي : سنبدأ بفصل جديد من مقررنا وهو الزمر الجزئية الناظمية وزمرة الخارج وفي محاضرنا اليوم سوف نتحدث عن :

- الزمرة الناظمية وبعض خواصها .
- جداء الناظمية .

وجدنا من خلال دراستنا للمرافقات اليسارية واليمينية أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G و $a \in G$ فليس بالضرورة أن يكون $aH = Ha$ لذا سندرس الزمر التي لأجلها تكون جميع الزمر اليسارية واليمينية متساوية.

تعريف الزمر الجزئية الناظمية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G نقول ان H ناظمية في G إذا حققت الشروط :

$$\forall a \in G; \quad aH = Ha$$

ـ ينتج مباشرة من التعريف :

١) لأجل أية زمرة G فإن كلا من G و $< e >$ زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) اذا كانت الزمرة G تبديلية ، كانت جميع زمرها ناظمية.

مثال: في الزمرة $(Z_9 , +)$ بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 9 فإن :

$$H = \{0 , 3 , 6\}$$

زمرة جزئية Z_9 تحقق أن $\forall \ a \in Z_9 , \ a + H = H + a$ زمرة جزئية في Z_9

تمهيدية :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الزمرة الجزئية H ناظمية في G .
٢) $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$
٣) $a^{-1}H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

الاثبات :

$((1 \leftarrow 2))$ لنفرض أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G عندئذ فحسب التعريف فإن :

$$\forall a \in G; \quad a.H = H.a$$

ليكن $x \in aHa^{-1}$ عندئذٍ يوجد $h \in H$ بحيث $x = a.h.a^{-1}$

ولما كان $ah \in aH = Ha \Leftarrow$ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $ah = h_0 a$

$$\Rightarrow x = a.h.a^{-1} = h_0.a.a^{-1} = h_0 \in H$$

$$\Rightarrow a.H.a^{-1} \subseteq H$$

$((1 \leftarrow 2))$ نريد اثبات أنه $\forall a \in G; \quad aH = Ha$

ليكن $a \in G$, $y \in aH$ عندئذٍ يوجد $h_1 \in H$ بحيث :

$$y = ah_1 = ah_1e = a.h_1.a^{-1}.a \in aHa^{-1}.a \subseteq Ha \Rightarrow a.H \subseteq H.a$$

بنفس الطريقة نثبت الاحتواء المعاكس ومنه يتم المطلوب

$((3 \leftarrow 2))$ لنفرض أن $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

ولما كان $a^{-1} \in G$ فإن $a^{-1}H.(a^{-1})^{-1} \subseteq H$

فإن $a^{-1}H.a \subseteq H$

$((1 \leftarrow 3))$ لنفرض أن $a^{-1}H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall a \in G$

لإثبات أن H زمرة جزئية ناظمية في G يجب إثبات أن :

$$\forall a \in G \; ; \; a.H = H.a$$

ليكن $y \in aH$ عندئذ يوجد $h \in H$ فإن $y = ah$

$y = a.h.\underbrace{a^{-1}.a}_{\text{محايد}}$ (ضربنا بالمحايد $a.h$)

$$= (a.h.a^{-1}).a = \underbrace{((a^{-1})^{-1}.h.a^{-1})}_{\in H(3\text{حسب})}.a \in Ha$$

$$\Longrightarrow aH \subseteq Ha$$

لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in Ha$ عندئذ $y = h_1 a$ حيث $h_1 \in \mathrm{H}$ ومنه :

$$y = h_1 a = \underbrace{a.a^{-1}}_{\text{محايد}}.h_1.a = a.(a^{-1}.h_1.a) \epsilon\, aH$$

$$\Longrightarrow Ha \subseteq aH$$

ومن الاحتواءين نجد أن $Ha = aH$ ومنه الزمرة الجزئية ناظمية في G

خواص الزمر الناظمية :

مبرهنة: لتكن G زمرة فإن القضايا التالية صحيحة :

١) تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) مركز الزمرة G أي $Z(G)$ هو زمرة جزئية ناظمية في G .
٣) لتكن H, k زمرة جزئية في G بحيث $H \subseteq k$ إذا كانت H ناظمية في G عندئذ H تكون ناظمية في K .
٤) اذا كانت H زمرة جزئية في G وتحقق $(G:H) = 2$ عندئذ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

الاثبات :

١) لتكن $\{H_i\}_{i\in I}$ ((حيث I مجموعة ما و قابلة للعد)) أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G

ولنفرض ان $D = \cap_{i\epsilon I} H_i$ وجدنا سابقاً ان D زمرة جزئية في G لنبرهن على انها ناظمية في G

$$\forall a \in G \quad , \qquad a.D.a^{-1} \subseteq D$$

ليكن $y \in a.D.a^{-1}$ حيث $a \in G$ عندئذٍ يوجد $d \in D = \cap_{i\epsilon I} H_i$ بحيث $y = a.d.a^{-1}$

وذلك لاجل كل $\forall i \in I$ و $d \in H_i$ ولما كانت H_i ناظمية في G فإن العنصر

$$y = a.d.a^{-1} \in a.H_i a^{-1} \subseteq H_i \quad : \forall i \in I$$

نجد ان D ناظمية في G $\qquad y \in \cap_{i\epsilon I} H_i = D$

٢) لدينا $Z(G) = \{a : a \in G \; ; ax = xa \; ; \forall x \in G \}$

زمرة جزئية في G لنبرهن على أنه $aZ(G)a^{-1} \subseteq Z(G) \quad ; \quad \forall a \in G$

ليكن $x \in aZa^{-1}$ عندئذ يوجد $y \in Z(G)$ بحيث :

$$x = aya^{-1} = yaa^{-1} = y \in Z(G)$$

أي أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G ..

٣) لنفرض ان $H \subseteq K$ وان H ناظمية في G عندئذٍ: $\forall a \in G\,; a.H.a^{-1} \subseteq H$

لنثبت ان H ناظمية في K $\forall k \in K\,; k \in G\ ,\ k.H.k^{-1} \subseteq H$

وهذا يبين ان H ناظمية في K

٤) لتكن Hزمرة جزئية في G ولنفرض أن $(G:H) = 2$ أي أن الدليل "2" يدل على عدد المرافقات وبالتالي يوجد مرافقتين للزمرة H فقط هما H و aH مولدة بعنصر مختلف عن المحايد أي أن $a \in G\ , a \neq e$ أي :

$\{eH, aH\}$المرافقتين اليساريتين الوحيدتين في G

والمرافقات تشكل تجزئة : $e \neq a \in G$

$$\Rightarrow G = H \cup a.H$$
$$\Rightarrow aH = G \setminus H$$

وايضاً لدينا

$$G = H \cup H.a$$
$$\Rightarrow H.a = G \setminus H$$

عندئذٍ H ناظمية في $G \Rightarrow a.H = H.a$

مبرهنة: لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية في G .
٢) $A.B = < A \cup B >$
٣) $A.B = B.A$

الاثبات :

$((1 \leftarrow 2))$لنفرض أن الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G وليكن $a \in AUB$ عندئذ :

١- اذا كان $a \in A$ فإن $a = a.e \in A.B$
٢- اذا كان$b \in B$فإن $a = e.a \in A.B$

في كل الأحوال العنصر a موجود في الجداء $A.B$

$$\Rightarrow AUB \subseteq A.B$$
$$AUB \subseteq < AUB >$$
$$\Rightarrow < AUB > \subseteq A.B$$

ليكن $y = a.b\ ,\ y \in A.B$

حيث $b \in B\ ,\ a \in A$ ومنه: $a, b \in AUB \subseteq < AUB >$

(زمرة مغلقة اذا حوّت عنصرين تحوي جداءهما)

$$y = a.b \in < A \cup B >$$
$$\Rightarrow A.B \subseteq < A \cup B >$$

من الاحتوائين نجد $\Rightarrow A.B = < A \cup B >$

$((2 \longrightarrow 3))$ لنفرض أن $A.B = < A \cup B >$ عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية في G

ليكن $x \in A.B$ عندئذٍ $x^{-1} \in A.B$ وبالتالي حسب تعريف الجداء:

$$x^{-1} = a.b : a \in A \ , b \in B$$

$$, x = (x^{-1})^{-1} = (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1} \in B.A$$

$$\Rightarrow A.B \subseteq B.A$$

ملاحظة: بما ان $A.B = < A \cup B >$ فهذا يعني ان $A.B$ زمرة ولكن $B.A$ ليست بالضرورة زمرة بل مجموعة.

لنثبت الاحتواء المعاكس:

ليكن $y \in B.A$ عندئذ $y = b_1.a_1$ حيث $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ ومنه

$$a_1, b_1 \in A \cup B \subseteq < A \cup B > = A.B$$

ومنه فإن $y = b_1.a_1 \in A.B$ وبالتالي $B.A \subseteq A.B$ (بنفس الطريقه اوجدنا الاحتواء المعاكس)

ومن الاحتواءين نجد : $A.B = B.A$.

$((3 \leftarrow 1))$ لنفرض ان $A.B = B.A$ نبرهن أن $A.B$ زمرة جزئية في G

بما أن A, B ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي $e = \overset{\in A}{\overbrace{e}} . \overset{\in B}{\overbrace{e}} \in A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \in G$$

ليكن $x, y \in A.B$ حيث :

$$x = a_0.b_0$$
$$y = a_2.b_2$$

حيث : $a_0 , a_2 \in A$ و $b_0, b_2 \in B$

ومنه فإن $x.y^{-1} = a_0.b_0(a_2.b_2)^{-1} = a_0.\underbrace{(b_0.{b_2}^{-1}{a_2}^{-1})}_{\in B} = a_0(b_0.b_2^{-1})a_2^{-1}$

لنأخذ $b_0.b_2{}^{-1}.a_2{}^{-1} \in B.A = A.B$ نفرض للسهولة: $(b_0.b_2{}^{-1})a_2{}^{-1} = a_3.b_3$ حيث $b_3 \epsilon B$ و $a_3 \epsilon A$

$$\Rightarrow x.y^{-1} = a_0.a_3.b_3 \in A.B$$

وهذا يبين أن $A.B$ زمرة جزئية في G .

متى يكون جداء زمرتين هو رمز ة؟ لإجابة نأخذ المبرهنة التالية :

مبرهنة: لتكن G زمرة و A,B زمر جزئية في G إذا كانت B ناظمية في G عندئذ :

١) $A.B$ زمرة جزئية في G
٢) $A.B = < A \cup B >$
٣) $A.B = B.A$

الاثبات :

١) لنفرض ان الزمرة الجزئية B ناظمية في G : $e = e.e \in A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \subseteq G$$

ليكن $x,y \in A.B$ عندئذٍ:

$$x = a.b \quad ; \quad a, a_1 \epsilon A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b, b_1 \epsilon A$$

ومنه
$$x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1}$$
$$= \underbrace{a.a_1^{-1}}_{\in A}.\underbrace{a_1(b.b_1^{-1})a^{-1}}_{\in B} \in A.B$$

ومنه فإن $A.B$زمرة جزئية في G.

(٢) و(٣) ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة ومن اعتماداً على (١).

مبرهنة : لتكن G زمرة و A,B زمرتين جزئيتين في G .. القضايا التالية صحيحة :

- إذا كانت كل من الزمرين A,B ناظمية في G فإن الجداء AB هو زمرة جزئية ناظمية في G
- إذا كان كل من A,B تبديلية و ناظمية في G وكان $A \cap B = < e >$ فإن الجداء $A.B$ هو زمرة تبديلية ..

الاثبات :

- لنفرض ان كلا من A,B ناظمية في G عندئذ بالاعماد على المبرهنة الأخيرة نجد أن الجداء AB

هو زمرة جزئية في G لنبرهن الآن على تحقق الشرط :

$$\forall g \in G \quad , g(AB)g^{-1} \quad \subseteq \quad AB$$

ليكن $Z \in g(AB)g^{-1}$ عندئذ يوجد $a \in A, b \ \in B$ بحيث :

$$Z = g(ab)g^{-1} \quad = \quad (gag^{-1})(gbg^{-1}) \in AB$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة AB ناظمية في G

- نفرض أن كلا من الزمرين A, B تبديلية وناظمية في G

وأن $A \cap B =< e >$ عندئذ أيا كان $a \in A, b \ \in B$

فإن $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in B$

كذلك $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a\ (ba^{-1})b^{-1} \in A$

مما سبق نجد أن $ab = ba$ وبالتالي الزمرة الجزئية AB تبديلية ...

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر♥