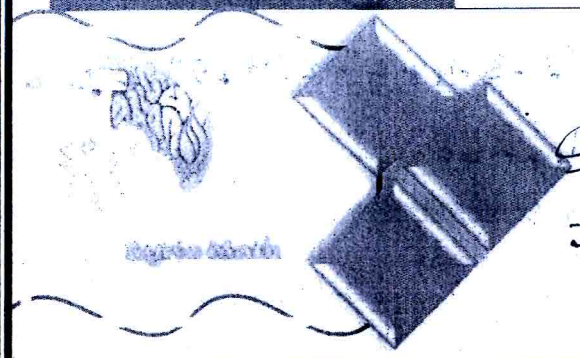

العاشرة

◄ دكتور: المادة: غصون الجيرودي

◄ عنوان المحاضرة: المحدبات الثنائية الخاصة

نظري ☑
عملي ☐

مثال:

$$\begin{aligned} \text{Min } & -5x+3y \\ \text{S.t } & 2x+3y=5 \\ & x-2y=7 \\ & x,y \geq 0 \end{aligned}$$

1 اكتب دالة لاغرانج و الدالة المرافقة.

2 اوجد البرنامج المرافق.

الحل: دالة لاغرانج:

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = -5x+3y-\lambda_1(2x+3y-5)-\lambda_2(x-2y-7) \quad \dots\dots *$$

الدالة المرافقة

$$d(\lambda) = \text{Min } L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)$$

$$\nabla_x L = -5-2\lambda_1-\lambda_2 = 0$$

$$\nabla_y L = 3-3\lambda_1+2\lambda_2 = 0$$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} L & \nabla_{xy} L \\ \nabla_{yx} L & \nabla_{yy} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \zeta^T \nabla^2 L \, \zeta \geq 0$$

معرفة موجبة وبالتالي يوجد نهاية صغرى لدالة لاغرانج

* نقوم بتجميع المعادلة (*) حيث نجمع أمثال x و أمثال y ... بالشكل

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = -5x-2\lambda_1 x-\lambda_2 x+3y-3\lambda_1 y+2\lambda_2 y+5\lambda_1+7\lambda_2$$

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=(5-2\lambda_1-\lambda_2)x+(3-3\lambda_1+2\lambda_2)y+5\lambda_1+7\lambda_2$$

$$d(\lambda)=\text{Min } L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)$$

$$d(\lambda)=0\times x+0\times y+5\lambda_1+7\lambda_2$$

$$d(\lambda)=5\lambda_1+7\lambda_2 \qquad ;\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$$

البرنامج المرافق: $\text{Max } d(\lambda)$:

$$\text{Max } 5\lambda_1+7\lambda_2$$
$$\text{s.t} \quad -2\lambda_1-\lambda_2=5$$
$$\& \quad +3\lambda_1+2\lambda_2=-3$$

شروط المتحولات الثنائية الخاصة:

المتحولات الثنائية الخاصة x_i حيث x_i يأخذ قيمتين إما 0 أو 1

$x_i=1$ اذا كان المشروع i سينفذ

$x_i=0$ اذا كان المشروع i لم ينفذ

الشروط:

1. على الأكثر k مشروع من n مشروع يجب أن ينفذ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k$$

2. على الأقل k مشروع من n مشروع يجب أن ينفذ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

3. اذا نفذ المشروع i المشروع j يجب أن ينفذ

نكتب كل الحالات:

	x_i	x_j	
حالة أولى →	1	1	✓
حالة ثانية →	1	0	✗
حالة ثالثة →	0	1	✓
حالة رابعة →	0	0	✓

نلغي الحالة الثانية بعلاقة رياضية فنكتب الشرط بناءً على الحالات التي نريد حذفها

$$-x_i + x_j \geq 0$$

ثم نتحقق اذا كان الشرط يحقق الشيء الذي نبحث عنه أم لا :

شرح كيفية التحقق:

كما وجدنا سابقاً الحالات المقبولة :

	x_i	x_j
حالة اولى ←	1	1
حالة ثانية ←	0	1
حالة ثالثة ←	0	0

يجب ان يحقق الشرط $-x_i + x_j \geq 0$

فبالنسبة للحالة الأولى نجد $-1+1 \geq 0$ وهي محققة

بالنسبة للحالة الثانية نجد $0+1 \geq 0$ وهي محققة

بالنسبة للحالة الثالثة نجد $0+0 \geq 0$ وهي محققة

* وكما وجدنا ان الحالة الغير مقبولة هي $x_i=1$ $x_j=0$

نتحقق من الشرط $-1+0 \geq 0$? وهي غير محققة

4. اذا نفذ المشروع i عندها المشروع j يجب ان ينفذ وبالعكس.

نكتب كل الحالات الممكنة

x_i	x_j	
1	1	✓
1	0	✗
0	1	✗
0	0	✓

ثم نرى الحالات المرفوضة والحالات المقبولة وعلى اساسها نكتب الشرط.

وضع الشرط : $x_i = x_j$ أو $x_i - x_j = 0$

5. اما ان ينفذ المشروع i أو المشروع j وليس كلاهما .

نكتب الحالات الممكنة

x_i	x_j	
1	1	x
0	1	✓
1	0	✓
0	0	x

وصف الشرط المنطقي هو $x_i + x_j = 1$

6. اما ان ينفذ المشروع i او المشروع j .

نكتب الحالات الممكنة

x_i	x_j	
1	1	✓
0	1	✓
1	0	✓
0	0	x

وصف الشرط المنطقي هو:

$x_i + x_j > 0$ او $x_i + x_j \geq 1$

7. يجب ان ينفذ المشروع i والمشروع j

نكتب الحالات الممكنة

x_i	x_j	
1	1	✓
0	1	x
1	0	x
0	0	x

وصف الشرط المنطقي هو:

$x_i + x_j = 2$

مسألة:

شركة تقوم بصناعة إلكترونيات تهدف الى تطوير مصنعها لتقوم بصناعة عدد من الأدوات الكهربائية قامت الشركة بدراسة سبع انواع مختلفة من المنتجات الكهربائية الجديدة وحصلت على المعطيات في الجدول التالي:

المنتجات الجديدة	الكلفة	الحاجة الى المساحة $م^2$	نسبة الربح المتوقع
1	6000	125	8,1
2	12000	150	9
3	20000	200	11
4	14000	40	10,2
5	15000	40	10,5
6	20000	20	14,1
7	32000	100	13,1

بعد الدراسة لاحظت الشركة

1- لايمكن ان تنتج النوع الأول الا اذا انتجت النوع الثالث أو الثاني.

2- لاتستطيع ان تنتج النوع الرابع والخامس في نفس الوقت.

3- يجب ان تنتج النوع الخامس فقط في حال انتجت النوع السابع.

4- الشركة تريد ان تنتج ثلاث انواع جديدة على الأقل

5- لدى الشركة 420 $م^2$ من المساحة المتاحة لديها

6- لديها مبلغ 450 000 ل.س تستثمرها في هذا المشروع.

اكتب النموذج القياسي للشركة يهدف الى تحديد المنتجات الجديدة للصنع لتحقيق افضل ربح

الحل:

$x_i=1$ اذا قامت الشركة بانتاج المنتج

$x_i=0$ اذا لم تقم الشركة بانتاج المنتج

دالة الهدف (الربح الشركة) ملاحظة الوحدة هي 1000 ليرة، الكتابة سنكتب 6 بدلاً من 6000 ...

$$Max\ (6\times 8{,}1)x_1 + (12\times 9)x_2 + (20\times 11)x_3 + (14\times 10{,}2)x_4 + (15\times 10{,}5)x_5 + (14{,}1\times 2)x_6 + (32\times 13{,}1)x_7$$

الشروط المسألة:

1) لا يمكن أن تنتج النوع الأول إلا إذا انتجت النوع الثاني أو النوع الثالث

x_1	(x_2 أو x_3)
1	1 ✓
1	0 ✗
0	1 ✓
0	0 ✓

نحذف الحالة الغير مقبولة وهي أن ($x_3=0$ و $x_2=0$ معاً)

$\Leftarrow$ الشرط المنطقي هو $-x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$

2) لا نستطيع أن ننتج النوع الرابع والخامس معاً، فالشرط هو

$x_1 + x_2 \leq 1$ ((أي $x_1 + x_2 \neq 2$))

3) يجب أن تنتج الشركة النوع الخامس فإما أن انتجت النوع السابع

x_7	x_5
1 ✓	1
0 ✗	1
1 ✓	0
0 ✓	0

فالشرط المنطقي هو $-x_5 + x_7 \geq 0$

4) على الشركة أن تنتج ثلاث أنواع جديدة على الأقل وضمن الشرط المنطقي

$$\sum_{i=1}^{7} x_i \geq 3$$

5) لدى الشركة $420\ m^2$ من المساحة المتاحة أي مجموع المساحة من المساحة بكل مقطعة مزروعة بعدد القطع المشتقة يجب ان لا يتجاوز الـ 420 حيث وضع الشرط

$$125x_1 + 150x_2 + 200x_3 + 40x_4 + 40x_5 + 20x_6 + 100x_7 \leq 420$$

6) لدينا 450000 للمشروع اي المجموع كلفة كل نوع مزروع بالكمية بكل نوع يجب ان لا يتجاوز المبلغ الكلي للشركة وضع

$$16x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 14x_4 + 15x_5 + 2x_6 + 32x_7 \leq 450$$

7) يضاف الى الشرط

$$x_i \in \{0, 1\}$$

من الممكن ان يضاف شرط على مسألة الاسناد كالتالي:

أضف الشروط التالية: ((توصيف شروط مسألة الاسناد بالأساس))

- ان يقوم الشخص 1 بالعمل 3 فقط في حال قام الشخص 2 بالعمل 4

$$x_{24} - x_{13} \geq 0$$

- ان يقوم الشخص 1 بالعمل 3 فقط في حال قام الشخص 2 بأي عمل

$$(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) - x_{13} \geq 0$$

عدد الوظائف = 5

مسألة النقل والشحن: أضف الشروط التالية:

اذا قام المصدر الأول بالنقل الى الوجهة 2 : σ_{12}

يجب ان يقوم بالشحن الى الوجهة 3 : σ_{13}

قيم هذه المسألة ليست (0,1) كمسألة الاسناد، لذلك نقوم باضافة متحولات جديدة بالقيمة

1 = إذا قام المصدر i بالنقل الى j .

0 = إذا لم يقم المصدر i بالنقل الى j .

فيكون الشرط هو $-\sigma_{12} + \sigma_{13} \geq 0$