المحاضرة 4

نظري ✓ عملي

◄ دكتور المادة: محمد بشير قابيل

◄ عنوان المحاضرة:

مبرهنة (ص الكسندروف): ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي هاوسدورف (T_2) ومتراص موضعياً وغير متراص وليكن $\infty \notin X$ ولنأخذ $X_\infty = X \cup \{\infty\}$

سنعرف على X_∞ تبولوجيا τ_∞ بحيث تجعله متراصاً كما يلي

$$\tau_\infty = \tau \cup \{X_\infty - K : K \subseteq X \wedge K \text{ is compact}\}$$

لاحظ أن $K=\phi$ متراصة $\Leftarrow X_\infty - K = X_\infty \in \tau_\infty$

والآن سنثبت أن: 1. (X_∞,τ_∞) فضاء تبولوجي

2. (X,τ) كثيف في (X_∞,τ_∞)

3. (X_∞,τ_∞) هو T_2 ومتراص

الحل:

1. من الواضح أن $\phi, X_\infty \in \tau_\infty$ حيث

$\phi \in \tau \subseteq X_\infty$, $X_\infty - \phi = X_\infty \in \tau_\infty$

⊛ مهما تكن $A,B \in \tau_\infty$ عندها نميز الحالات التالية:

أ) $A,B \in \tau \Leftarrow A \cap B \in \tau \Leftarrow A \cap B \in \tau_\infty$

ب) $A,B \in \tau'$ حيث:

$$\tau' = \{X_\infty - K : K \text{ is compact in } X\}$$

عندها

$$A = K_1^c \quad \wedge \quad B = K_2^c$$

حيث K_1, K_2 متراصة في X

$$\Rightarrow A \cap B = K_1^c \cap K_2^c = (K_1 \cup K_2)^c \in \tau'$$

اتحاد متراصين هو متراصة

Note that:
D^c متمم D في X
$X_\infty - D$ متمم D في X_∞

جـ) $A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{T}'$ عندئذ: $B = K^c$
حيث K متراصة في X
ولما كان X هو فضاء T_2 فكل متراصة
فيه مغلقة وبالتالي K مغلقة في X
وبالتالي $B = K^c$ مفتوحة في X أي $B \in \mathcal{T}$

$$\Rightarrow \underset{\in \mathcal{T}}{A} \cap \underset{\in \mathcal{T}}{B} \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$$

⊛ ليكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعة كيفية من $\mathcal{T}_\infty$، عندها نميز الحالات:

أ) $A_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I \Leftarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

ب) $A_i \in \mathcal{T}', \forall i \in I$
$\Leftarrow A_i = K_i^c$ حيث K_i متراصة في X
ولما كان X هاوسدورف $\Leftarrow K_i$ مغلقة في X
وبالتالي $A_i = K_i^c$ مفتوحة في X
أي $A_i \in \mathcal{T}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} K_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} K_i\right)^c = K^c$$

رمزنا $K = \bigcap_{i \in I} K_i$

لكن K متراصة $\Rightarrow$ $K \subseteq \underset{\text{متراصة}}{K_i}$ مغلقة

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = K^c \in \mathcal{T}$$

جـ) إذا كان $(A_\beta)_{\beta \in I_2} \subseteq \mathcal{T}'$ و $(A_\alpha)_{\alpha \in I_1} \subseteq \mathcal{T}$

حيث $I_1 \cup I_2 = I$

2

لكن :

$\bigcup_{\alpha\in I_1} A_\alpha \in \tau$ حسب (أ) $\wedge$ $\bigcup_{\beta\in I_2} A_\beta \in \tau'$ حسب (ب)

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I_1} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\beta\in I_2} A_\beta\right) = A \cup K^c = (\underbrace{A^c}_{\text{مغلقة}} \cap \underbrace{K}_{\text{متراصة}})^c$$

$\underbrace{A^c \cap K}_{\text{مغلقة}}$

إذن $\underbrace{A^c \cap K}_{\text{مغلقة}} \subseteq \underbrace{K}_{\text{متراصة}} \Longrightarrow A^c \cap K$ متراصة

$$\Rightarrow (A^c \cap K)^c \in \tau'$$

2) لنثبت الكثافة :

لدينا $X \subseteq cl(X) \subseteq X_\infty$

والهدف برهان أن $\infty \in cl(X)$

لنأخذ V جواراً له عنصرا $V = X_\infty - K$

حيث K متراصة (لاحظ أن X غير متراص $\Leftarrow K \neq X$)

$$\Rightarrow V = \underbrace{(X - K)}_{\neq \phi} \cup \{\infty\}$$

وبالتالي $V \cap X \neq \phi$

3) لنثبت أنه فضاء T_2 : ليكن $x, y \in X_\infty$ بحيث $x \neq y$

ولنميز الحالات التالية :

أ) $x, y \in X$ ، $x \neq y$ و X هو T_2 $\Leftarrow$ محققة .

ب) $y \in X$ و $x = \infty$

ولما كان X متراص محلياً يوجد U_y جواراً لـ y بحيث $\overline{U}_y$ متراصة.

$\Leftarrow$ $(\overline{U}_y)^c$ جواراً لـ $x = \infty$ ، نختار

$$\left.\begin{aligned} \theta_x &= (\overline{U}_y)^c \\ \theta_y &= U_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_x \cap \theta_y = \phi$$

$\Leftarrow$ تم المطلوب..

جـ) $y = \infty$ و $x \in X$ سنعيد المناقشة السابقة.

4) إثبات التراص: لتكن $\{k_i : i \in I, k_i \in \tau_\infty\}$ تغطية لـ X_∞
أي $X_\infty = \bigcup_{i \in I} k_i$

• لما كان $\infty \in X_\infty$ عندئذٍ يوجد k_{i_0} بحيث $\infty \in k_{i_0}$

k متراصة : $\Rightarrow k_{i_0} = X_\infty - k$

ولما كانت k متراصة فإن $\{k_i \cap X : i \in I - \{i_0\}\}$
تغطية لـ k وتملك تغطية جزئية منتهية

$$k \subseteq (k_{i_1} \cap X) \cup \cdots \cup (k_{i_n} \cap X)$$

$$\Rightarrow X_\infty = k \cup k_i \subseteq k_{i_0} \cup k_{i_1} \cup \cdots \cup k_{i_n}$$

$\Leftarrow$ متراص.

END