المحاضرة (22)

نظري ☑
عملي ☐

الإثنين
26/11/2018

◀ دكتور المادة: محمد مناف الحمد
◀ عنوان المحاضرة: حساب التحولات

تمهيدية (4): إذا كان كل من $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ دالتين مستمرتين على $[a,b]$ وكان $\int_a^b (\alpha(x) f(x) + \beta(x) f'(x))\, dx = 0$ لكل $f \in D_1$ وكان: $f(a) = f(b) = 0$ فإن $\beta(x)$ قابلة للاشتقاق و $\beta'(x) = \alpha(x)$ لكل $x \in [a,b]$.

البرهان لتكن $A(x) = \int_a^x \alpha(t)\, dt$ وحسب المبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل يكون:

$$A'(x) = \alpha(x)$$

ومن التكامل بالتجزئة نجد أنّ:

$$\int_a^b \alpha(x) f(x)\, dx = \left[A(x) . f(x) \right]_a^b - \int_a^b A(x) f'(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\left(A(b) . f(b) - A(a) f(a) \right)}_{=0} - \int_a^b A(x) f'(x)\, dx$$

$$= 0 - \int_a^b A(x) . f'(x)\, dx = - \int_a^b A(x) f'(x)\, dx$$

وعليه فإنّ:

$$\int_a^b \left(\alpha(x) f(x) + \beta(x) f'(x) \right) dx = \int_a^b \alpha(x) f(x)\, dx + \int_a^b \beta(x) f'(x)\, dx$$

$$= - \int_a^b A(x) f'(x)\, dx + \int_a^b \beta(x) f'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \left[-A(x) + \beta(x) \right] f'(x)\, dx = 0$$

ومن الفرض فإن التكامل الأخير يساوي الصفر

بالاعتماد على التمهيدية (2) نجد:

$-A(x)+\beta(x)=c$ وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x

$-A'(x)+\beta'(x)=0$

$\Rightarrow \beta'(x)=A'(x)$

$\beta'(x)=\alpha(x)$ لكل $x\in[a,b]$

وبذلك يتم المطلوب

الحساب التغيري للداليات:

تعود دراسة التغير للداليات إلى كل من أولر ولاغرانج أما التغير بمفهومه الجديد فظهر في أعمال العزنسي جاتكس Gateaux ولتعريف التغير بمفهومه الجديد يجب أولاً أن نذكر بتعريف المجموعة المفتوحة في فضاء متري

← إذا كان X فضاء متري فإن المجموعة $\{y\in X : \|y-x\|<r\}$ هي كرة مركزها x ونصف قطرها r ويرمز لتلك الكرة بالرمز $B_r(x)$.

ويقال عن مجموعة جزئية D من X أنها مفتوحة إذا كان لكل $x\in D$ نجد أن $B_r(x)\subseteq D$

ويقال عن مجموعة جزئية من D أنها مغلقة إذا كانت متممتها مفتوحة.

تعريف تغير دالي:

إذا كان J دالياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة D من الفضاء المتري X فيقال لـ J تغيراً عند النقطة $x\in D$، إذا وجد دالي δ_J معرف بالشكل:

$$\delta J(x,h)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(x+\varepsilon h)-J(x)}{\varepsilon}$$

وبحيث تكون قيمة $\delta J(x,h)$ محدودة لكل $h\in X$

إذاً:

$$\delta J(x,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(x+0)-J(x)}{\varepsilon} = 0$$

أو:

$$\delta J(x,h) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(J(x+\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

حيث أنّ εh هي دالة اختيارية وتدعى هذه الدالة بتغير الدالة x ، وبالتعويض عن h بالرمز Δx الذي يرمز أيضاً لتغير الدالة x يكون:

$$\delta J(x,\Delta x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(x+\varepsilon\Delta x)-J(x)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon\Delta x)\Big|_{\varepsilon=0}$$

مثال: أوجد التغير الدالي:

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx$$

ثم أوجد $\delta J(y,\Delta y)$ عندما:

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}.$$

الحل: بما أنّ $J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$ إذاً:

$$\delta J(y,\Delta y) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon\Delta y)\Big|_{\varepsilon=0}$$

وبالتالي فإنّ:

$$J(y+\varepsilon\Delta y) = \int_a^b F(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\,dx$$

وبالتالي:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon\Delta y) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, y+\varepsilon\Delta y, y'+\varepsilon\Delta y')\,dx$$

ومن قاعدة لايبنتز للاشتقاق تحت رمز التكامل والتي تنص على:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right)=f(x,b(x))\cdot\frac{d\,b(x)}{dx}-f(x,a(x))\frac{d}{dx}a(x)$$

$$+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$$

يكون لدينا الاشتقاق تحت رمز التكامل في العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(y+\varepsilon\Delta y)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\,dx$$

$$=f(b,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\frac{db}{d\varepsilon}-$$

$$-f(a,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\frac{da}{d\varepsilon}$$

$$+\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\,dx$$

$$=0+0+\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\,dx$$

إلا أنه بالاعتماد على قاعدة السلسلة يكون لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial\varepsilon}$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')=\frac{\partial F(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')}{\partial y}\,\Delta y$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y+\varepsilon\Delta y,y'+\varepsilon\Delta y')\cdot\Delta y'$$

وبالتالي نرى:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y+\varepsilon \Delta y)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,y')\Delta y + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\Delta y'$$

وعليه يكون تغير التابعي بالشكل:

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\Delta y'\right] dx$$

أما في مسألتنا كان:

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}$$

ومنه:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}\right] = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g}}\ \frac{\partial}{\partial y}(y_0-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(y_0-y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2(y_0-y)}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left[\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\ \frac{\partial}{\partial y'}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}} \cdot (2y')\left(\frac{1}{2}\right)(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}} \cdot \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{2g(y_0-y)(1+y'^2)}}$$

$$\delta J(y,\Delta y) = \int_a^b \left[\frac{1}{2(y_0-y)}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}} \cdot \Delta y + \frac{y' \cdot \Delta y'}{2g(y_0-y)(1+y'^2)}\right] dx$$

وهو المطلوب...

تعريف لتكن D مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء المتري X، لتكن $y_0 \in D$ و J دالياً على D.

1) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة عظمى محلية للدالي J إذا وجدت كرة مفتوحة $B_r(y_0)$ بحيث:

$J(y) \leq J(y_0)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_0)$.

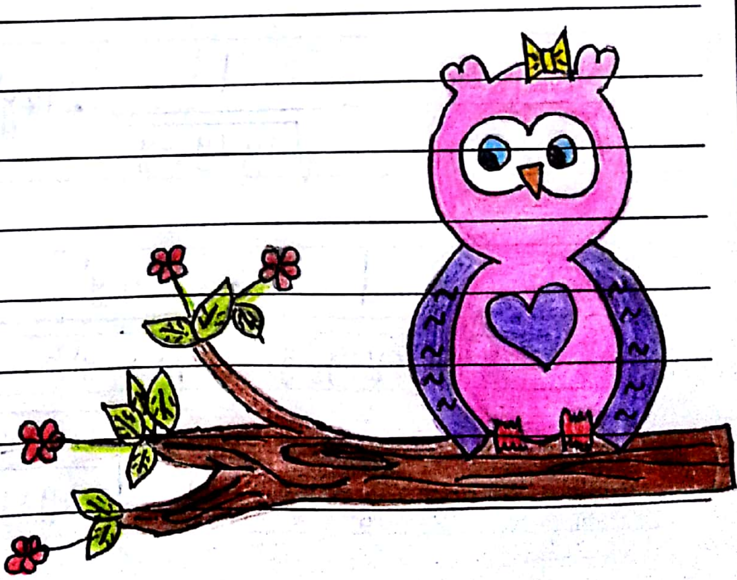
2) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة صغرى محلية للدالي J إذا كانت $J(y) \geq J(y_0)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_0)$

3) يقال عن $J(y_0)$ إنها قيمة قصوى للدالي J عند $y_0 \in D$ إذا كانت $J(y_0)$ قيمة عظمى أو صغرى للدالي J

وتسمى القيمة القصوى قيمة قصوى ضعيفة للدالي $J(y_0)$ إذا كان الفرق ΔJ نفس الإشارة لكل $f \in E_1$

انتهت المحاضرة ...

إعداد: إيناس دليل ...



" من المستحيل أن يذهب لغيرك شيءٌ قد كتبه الله لك فاطمئن لا تحسد لا تحقد وعش بقلب أبيض نقي

كن مع الله يكون الله معك " !