المحاضرة (17) و (18)

الإثنين
12/11/2018

◄ دكتور المادة: محمد مناف الحمد

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية

نظري ☑
عملي ☐

"رد معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى النوع الثاني:"

نعلم أن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول هي:

$$\int_0^x k(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt = f(x) \quad , \quad f(0)=0 \quad \dots (*)$$

((شرط هام))

حيث: $\varphi(t)$ هو التابع المجهول.

لنفرض أن الدوال $\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ و $k(x,t)$ و $f(x)$ هي دوال مستمرة في المنطقة المحددة بالمتباينات:

$$0 \le x \le a \quad , \quad 0 \le t \le x$$

باشتقاق طرفي المساواة $(*)$ بالنسبة لـ x نجد أن:

$$k(x,x)\,\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\,\varphi(t)\cdot dt = f'(x) \quad \dots (**)$$

إن أي حل مستمر $\varphi(x)$ للمعادلة $(*)$ ومحقق للمتراجحة $0 \le x \le a$ فهو يحقق المعادلة $(**)$.

وكذلك أي حل مستمر للمعادلة $(**)$ من أجل $0 \le x \le a$ يحقق المعادلة $(*)$

نقسم طرفي المساواة $(**)$ على $k(x,x)$ فنجد مايلي:

$$\varphi(x) + \frac{1}{k(x,x)}\int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\,\varphi(t)\cdot dt = \frac{f'(x)}{k(x,x)}$$

بعزل $\varphi(x)$ واستخدام خواص التكامل نجد:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)} - \int_0^x \frac{k'_x(x,t)}{k(x,x)}\,\varphi(t)\cdot dt \quad \dots (***)$$

وذلك بفرض أن: $k(x,x) \ne 0$ وذلك أياً كانت $0 \le x \le a$

نلاحظ أنّ المعادلة (***) ما هي إلا معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني وبمقارنتها مع الحل العام نجد:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \quad , \quad H(x,t) = \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)} \quad , \quad \lambda = -1$$

ونقوم بحلها بالطرق المعروضة لدينا.

وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية:

نظرية: بفرض أنّ f, K من الصف C^1 وأنّ $\left(K(x,x) \neq 0 \ ; \ \forall x \in [0,a] \right)$ عندئذٍ فإن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول يمكن ردّها إلى معادلة فولتيرا من النوع الثاني.

معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثالث:

لنأخذ المعادلة (***) من الفقرة السابقة

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)} \cdot \varphi(t) \cdot dt \quad \dots (***)$$

إذا انعدمت الدالة $K(x,x)$ في بعض نقاط المجال $[0,a]$ ، على سبيل المثال في النقطة $x=0$ ، عندئذٍ تسمى المعادلة *** بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثالث

تمرين محلول ص81: أوجد حل المعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول وذلك بردها إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$\int_0^x \cos(x-t)\, \varphi(t) \cdot dt = x$$

الحل: نلاحظ أن الدالة $f(x) = x$ مستمرة

$K(x,t) = \cos(x-t)$ أيضاً دالة مستمرة.

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \cos(x-t)}{\partial x} = -\sin(x-t)$$ دالة مستمرة.

ونلاحظ أنّ: $K(x,x) = \cos(x-x) = \cos(0) = 1 \neq 0 \quad \forall x$

وأيضاً $f(0) = 0$ ، وبالتالي جميع شروط النظرية محققة ويمكن رد المعادلة المفروضة إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

- نشتق طرفي المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x ، فنحصل على: (الإشتقاق حسب دستور الاشتقاق)

$$\cos(x-x)\,\varphi(x) - (0) + \int_0^x \frac{\partial \cos(x-t)}{\partial x}\,\varphi(t).dt = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t).dt$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني والناتجة عن المعادلة المفروضة.

نلاحظ الآن أنّ النواة في المعادلة الأخيرة تابعة للفرق ومنه لإيجاد الحل لها نستخدم تحويلات لابلاس.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نحصل على:

$$L[\varphi(x)] = L\left[1 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t).dt\right]$$

من خاصية الخطية:

$$L[\varphi(x)] = L[1] + L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t).dt\right] \quad \ldots (1)$$

نفرض أنّ:

$$L[\varphi(x)] = L[\varphi(t)] = \phi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[1] = \frac{1}{z}$$

$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t).dt\right] = L[\sin(x)].L[\varphi(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$= \frac{1}{z^2+1}.\phi(z)$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$\phi(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1}\phi(z)$$

$$\left(1 - \frac{1}{z^2+1}\right)\phi(z) = \frac{1}{z} \rightarrow \left(\frac{z^2}{z^2+1}\right)\phi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Longrightarrow \phi(z) = \frac{z^2+1}{z^3} = \frac{z^2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي وبالاستفادة من خاصية الخطية نجد:

$$\varphi(x) = L^{-1}[\phi(z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{z^3}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

وهو حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني الناتجة عن المعادلة المفروضة

وبالتالي:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

هو الحل العام للمعادلة المفروضة #

ملاحظة: كان بإمكاننا الحصول على الحل بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على المعادلة المفروضة

$$\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x$$

دون إجراء العمليات الرياضية من اشتقاق جزئي وغيرها.

إذ أنّ: $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة السابقة نجد:

$$L\left[\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right] = L[x]$$

لكن:

$$L\left[\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right] = L[\cos x]\cdot L[\varphi(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$= \frac{z}{z^2+1}\,\phi(z)$$

وأيضاً:

$$L[x] = \frac{1}{z^2}$$

ومنه بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$\frac{z}{z^2+1}\,\phi(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$\Longrightarrow \phi(z) = \frac{z^2+1}{z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$L^{-1}[\phi(z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

وبذلك يتم المطلوب...

تمرين غير محلول ص 157، رقم 41: أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول التالية:

$$\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt = ch(x) - 1$$

الحل 1

نلاحظ أنّ المسألة $f(x) = ch(x) - 1$ مستمرة

$k(x,t) = x - t$ دالة مستمرة أيضاً..

$\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial (x-t)}{\partial x} = 1$ مستمرة أيضاً..

$$f(0) = ch(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

ونلاحظ أنّ الشرط الأخير غير محقق

$$k(x,x) = (x - x) = 0 \quad ; \quad \forall x$$

[الذي يفيد بأنّ: $k(x,x) \neq 0 \quad \forall\ 0 \leq x \leq a$]

وبالتالي لا نستطيع رد المعادلة المعروضة إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ولكن: كون النواة تابعة للفرق يمكننا حل المعادلة المعروضة باستخدام تحويلات لابلاس مباشرةً

$$\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt = ch(x) - 1$$

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نجد:

$$L\left[\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt\right] = L[ch(x) - 1]$$

بالاستفادة من خاصية الخطية:

$$L\left[\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt\right] = L[ch(x)] - L[1]$$

لكن:

$$L\left[\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt\right] = L[x] \cdot L[y(t)] = \frac{1}{Z^2}\, Y(Z)$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$L[ch(x)] = \frac{Z}{Z^2 - 1}$$

$$L[1] = \frac{1}{Z}$$

ومنه بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$\frac{1}{Z^2}\, Y(Z) = \frac{Z}{Z^2 - 1} - \frac{1}{Z} = \frac{Z^2 - Z^2 + 1}{Z(Z^2 - 1)} = \frac{1}{Z(Z^2 - 1)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{z^2} Y(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2-1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أن:

$$y(x) = L^{-1}[Y(z)] = L^{-1}\left[\frac{z}{z^2-1}\right] = ch(x)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = ch\,t}$$

وهو الحل للمعادلة المفروضة

تمرين غير محلول ص 157 رقم 42 : أوجد حل المعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول التالية:

$$\int_0^x \sin(x-t).y(t).dt = \frac{1}{2}x^4$$

وذلك بردها إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

الحل: نلاحظ أن: $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ دالة مستمرة.

$k(x,t) = \sin(x-t)$ دالة مستمرة

$\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \sin(x-t)}{\partial x} = \cos(x-t)$ دالة مستمرة.

$$f(0) = \frac{1}{2}(0)^4 = 0$$

نلاحظ أن: $k(x,x) = \sin(x-x) = \sin(0) = 0 \ \forall x$

وبالتالي الشرط الأخير غير محقق ولا نستطيع رد المعادلة المفروضة إلى معادلة فولتيرا من النوع الثاني وكون النواة تابعة للفرق عندئذ نحل المعادلة المفروضة مباشرة باستخدام تحويلات لابلاس، بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة السابقة نجد:

$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)y(t).dt\right] = L\left[\frac{1}{2}x^4\right] \quad ...(1)$$

بالاستفادة من الخاصية الخطية:

$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)y(t).dt\right] = \frac{1}{2}L[x^4]$$

لكن:

$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt\right] = L[\sin(x)]\,.\,L[y(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$= \frac{1}{z^2+1}\,y(z)$$

$$L[x^4] = \frac{\Gamma(4+1)}{z^{4+1}} = \frac{\Gamma(5)}{z^5} = \frac{4!}{z^5} = \frac{24}{z^5}$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$\frac{1}{z^2+1}\,y(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{z^5}\right) \Rightarrow \frac{1}{z^2+1}\,y(z) = \frac{12}{z^5}$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{12(z^2+1)}{z^5} = \frac{12}{z^3} + \frac{12}{z^5}$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{12}{z^3} + \frac{12}{z^5}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

نعلم أنَّ:

$$L^{-1}\left[\frac{2}{z^3}\right] = x^2$$

$$L^{-1}\left[\frac{24}{z^5}\right] = x^4$$

ومنه:

$$y(t) = L^{-1}[y(z)] = L^{-1}\left[6\,.\,\frac{2}{z^3} + \frac{1}{2}\,\frac{24}{z^5}\right]$$

$$= 6\,L^{-1}\left[\frac{2}{z^3}\right] + \frac{1}{2}\,L^{-1}\left[\frac{24}{z^5}\right]$$

$$= 6\,t^2 + \frac{1}{2}\,t^4 = t^2\left(6 + \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = t^2\left(6 + \frac{1}{2}t^2\right)$$ وهو المطلوب !!!

تمرين غير محلول صـ 157 رقم 43 :

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول التالية:

$$\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt = x.\sin x$$

وذلك بردها إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

الحل: نلاحظ أنَّ:

$f(x) = x.\sin x$ دالة مستمرة،

$k(x,t) = \cos(x-t)$ دالة مستمرة.

$\frac{\partial k(x,t)}{\partial x} = -\sin(x-t)$ دالة مستمرة،

ونلاحظ أنَّ:

$$f(0) = 0$$

$$k(x,x) = \cos(x-x) = \cos(0) = 1 \neq 0 \quad \forall x$$

وبالتالي جميع شروط النظرية محققة ويمكننا رد المعادلة المفروضة إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

نشتق طرفي المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x نحصل على:

$$(1)\cos(x-x)\,y(x) - 0 + \int_0^x \frac{\partial \cos(x-t)}{\partial x}\,y(t)\,dt = \sin x + x\cos x$$

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt = \sin x + x\cos x$$

$$\Longrightarrow y(x) = \sin x + x\cos x + \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt \quad ...(*)$$

المعادلة $(*)$ هي معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني والناتجة عن المعادلة المفروضة.

نلاحظ أنَّ النواة في المعادلة $(*)$ تابعة للفرق وبالتالي لإيجاد الحل لها نستخدم تحويلات لابلاس.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة $(*)$ نجد:

$$L[y(x)] = L\left[\sin x + x\cos x + \int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt\right]$$

بالاستفادة من خاصية الخطية

$$(**)\ldots\quad L[y(x)] = L[\sin x] + L[x\cos x] + L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt\right]$$

نفرض أنّ :
$$L[y(x)] = L[y(t)] = Y(Z)$$

ونعلم أنّ :
$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt\right] \underset{\downarrow}{=} L[\sin x]\cdot L[y(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$= \frac{1}{Z^2+1}\,Y(Z)$$

$$L[\sin x] = \frac{1}{Z^2+1}$$

$$L[x\cos x] = (-1)\left(\frac{Z}{Z^2+1}\right)' = -\frac{1(Z^2+1) - 2Z(Z)}{(Z^2+1)^2} = \frac{Z^2-1}{(Z^2+1)^2}$$

بالتعويض في ** نجد :

$$Y(Z) = \frac{1}{Z^2+1} + \frac{Z^2-1}{(Z^2+1)^2} + \frac{1}{Z^2+1}\,Y(Z)$$

$$Y(Z) - \frac{1}{Z^2+1}\,Y(Z) = \frac{Z^2+1+Z^2-1}{(Z^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{Z^2+1-1}{Z^2+1}\right) Y(Z) = \frac{2Z^2}{(Z^2+1)^2} \Longrightarrow Y(Z) = \frac{2}{Z^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد :

$$y(x) = L^{-1}[Y(Z)] = 2\,L^{-1}\left[\frac{1}{Z^2+1}\right] = 2\sin x$$

$\Longrightarrow \quad y(x) = 2\sin x$

وهو حل المعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني الناتجة عن المعادلة المفروضة ومنه:

$$y(t) = 2\sin t$$

وهو حل المعادلة المفروضة "

ملاحظة ((الشرط الضروري لوجود حل مستمر للمعادلة التكاملية التي من الشكل:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\,dt = f(x)$$

يتضمن امتلاك التابع $f(x)$ مشتقات من مراتب أعلى من n

أما بقية المشتقات الأولى التي عددها $n-1$ مرة معدومة من أجل $x=0$

مثال لتكن لدينا المعادلة التكاملية

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt = x$$

الحل: نلاحظ أنّ: $f(x) = x$

$n = 2$

من الواضح أنّ جميع مشتقات التابع $f(x)$ موجودة من أجل أيّ مرتبة.

وأنّ المشتق من المرتبة الأولى $f'(x) = 1 \neq 0$ ، أي أنّ الشرط الضروري غير محقق

- بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة نجد:

$$L\left[\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt\right] = L[x] \quad \dots (1)$$

نفرض:

$$L[\varphi(t)] = \phi(z)$$

ولدينا:

$$L\left[\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt\right] = L[x]\cdot L[\varphi(t)] = \frac{1}{z^2}\phi(z)$$

"مبرهنة الالتفاف"

$$L[x] = \frac{1}{z^2}$$

بالتعويض في (1) نجد أنّ:

$$\frac{1}{z^2}\phi(z) = \frac{1}{z^2} \Longrightarrow \phi(z) = 1$$

$\phi(z) = 1$ ماهو إلا تحويل لابلاس للدالة $\delta(t)$ (دالة ديراك)(دالة النبضة):
تعرف بالشكل:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0 \\ \infty & ; x = 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإن حل المعادلة المفروضة هو:

$$\phi(x) = \delta(x)$$

وبالتالي حل المعادلة التكاملية موجود وهو $\delta(x)$ لكن غير مستمر.

معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول الملفوف:

وهي من الشكل:

$$\int_0^x k(x-t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

حيث النواة $k(x-t)$ تابعة للفرق $x-t$

لحل هذا النوع من المعادلات نفرض أن التوابع $f(x)$ و $k(x)$ أصول

* نتكلم عن الدالة الأصلية $g(t)$ المحققة للشروط الثلاثة التالية أي أصلاً:

[1] - $g(t) = 0$ من أجل $t < 0$

[2] - من أجل $t \geq 0$ الدالة $g(t)$ مستمرة جزئياً (أي أنه في كل مجال محدود من نصف المحور الحقيقي $[0, \infty[$ يمكن أن يكون للدالة عدد منتهٍ من نقط الانقطاع)

[3] - مع تزايد المتحول t يمكن للقيمة المطلقة للدالة $g(t)$ أن تتزايد إلا أنها تبقى محققة للعلاقة:

$$|g(t)| \leq \underbrace{N e^{xt}}_{\text{محدودة بهذا المقدار}} \; ; \; N > 0 \; ; \; x \geq 0$$

الآن بفرض أنّ:

$$L[f(x)] = F(z) \quad ; \quad L[k(x)] = K(z)$$

إنّ المعادلة المفروضة هي:

$$\int_0^x k(x-t)\,\varphi(t).dt = f(x)$$

بتطبيق تحويل لابلاس على الطرفين نجد:

$$L\left[\int_0^x k(x-t)\,\varphi(t).dt\right] = L[f(x)]$$

$$K(z)\,\Phi(z) = F(z) \Longrightarrow \Phi(z) = \frac{F(z)}{K(z)}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$\varphi(x) = L^{-1}[\Phi(z)] = L^{-1}\left[\frac{F(z)}{K(z)}\right]$$

مثال محلول: أوجد حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t).dt = x$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة:

$$L\left[\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t).dt\right] = L[x]$$

بفرض أنّ $L[\varphi(t)] = \Phi(z)$ ، ولدينا:

$$L[x] = \frac{1}{z^2}$$

$$L\left[\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t).dt\right] = L[e^x].L[\varphi(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

$$= \frac{1}{z-1}\,\Phi(z)$$

ومنه بالتعويض بالمعادلة المفروضة:

$$\frac{1}{z-1}\,\Phi(z) = \frac{1}{z^2} \Longrightarrow \Phi(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\varphi(x) = 1 - x$$

وهو حل المعادلة المعروفة ..

استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية التكاملية:

تعريف: نسمي العلاقة التابعية من الشكل:

$$M[\varphi(t)] = h(t) - \int_0^t k(t,s)\, N[\varphi(s)]\, ds$$

حيث: $\varphi(t)$ دالة مجهولة

$M[\varphi(t)]$ ، $N[\varphi(s)]$ عبارتان تفاضليتان (مؤثران تفاضليان) من المرتبة m و n على الترتيب بمعادلة تفاضلية تكاملية.

سنعرض كيفية إيجاد الحل للمعادلة السابقة بحالة تكون فيها العبارتان التفاضليتان خطيتين وأمثالها ثوابت عددية، والنواة $k(t,s)$ تابعة للفرق بين المتحولين s, t .

تمرين (1) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التكاملية الآتية:

$$\varphi'(t) + \int_0^t [\cos(t-s) - 2]\, \varphi(s)\, ds = 0$$

والمزودة بالشرط الابتدائي:

$$\varphi(0) = 4$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المعروفة نجد:

$$L\left[\varphi'(t) + \int_0^t [\cos(t-s) - 2]\, \varphi(s).ds\right] = 0$$

من خاصية الخطية:

$$L[\varphi'(t)] + L\left[\int_0^t [\cos(t-s) - 2]\, \varphi(s).ds\right] = 0 \quad \text{...}(1)$$

لكن: من خواص تحويلات لابلاس لدينا:

$$L[\psi'(t)] = z\,\Psi(z) - \psi(0) = z\,\Psi(z) - 4$$

"من الشرط الابتدائي"

ولدينا من مبرهنة الالتفاف وخاصية الخطية:

$$L\left[\int_0^t [\cos(t-s) - 2]\,\psi(s).ds\right] = L\left[\int_0^t \cos(t-s)\,\psi(s).ds\right] - 2L\left[\int_0^t \psi(s).ds\right]$$

$$= L[\cos t].L[\psi(s)] - 2L[1].L[\psi(s)]$$

$$= \frac{z}{z^2+1}\Psi(z) - \frac{2}{z}\Psi(z)$$

وبالتالي بالعودة إلى (1) نحصل على:

$$z\,\Psi(z) - 4 + \frac{z}{z^2+1}\Psi(z) - \frac{2}{z}\Psi(z) = 0$$

$$\longrightarrow \left(z + \frac{z}{z^2+1} - \frac{2}{z}\right)\Psi(z) = 4$$

$$\longrightarrow \left(\frac{z^4-2}{z(z^2+1)}\right)\Psi(z) = 4$$

$$\longrightarrow \Psi(z) = \frac{4z^3+4z}{z^4-2} = \frac{4z^3+4z}{(z^2-\sqrt{2})(z^2+\sqrt{2})}$$

$$\Psi(z) = \frac{4z^3+4z}{(z^2-\sqrt{2})(z^2+\sqrt{2})}$$

لنفرق الكسر:

$$\frac{4z^3+4z}{(z^2-\sqrt{2})(z^2+\sqrt{2})} = \frac{Az+B}{z^2-\sqrt{2}} + \frac{Cz+D}{z^2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(Az+B)(z^2+\sqrt{2}) + (Cz+D)(z^2-\sqrt{2})}{(z^2+\sqrt{2})(z^2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(A+C)z^3 + (B+D)z^2 + \sqrt{2}(A-C)z + \sqrt{2}(B-D)}{(z^2+\sqrt{2})(z^2-\sqrt{2})}$$

بالمطابقة نجد:

$$\left.\begin{aligned} A+C&=4\\ B+D&=0\\ \sqrt{2}\,(A-C)&=4\\ B-D&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالحل المشترك}} \quad A=2+\sqrt{2} \qquad B=D=0 \qquad C=2-\sqrt{2}$$

ومنه:

$$\varphi(z)=\frac{(2+\sqrt{2})z}{z^2-\sqrt{2}}+\frac{(2-\sqrt{2})z}{z^2+\sqrt{2}}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\varphi(z)]=L^{-1}\left[\frac{(2+\sqrt{2})z}{z^2-\sqrt{2}}+\frac{(2-\sqrt{2})z}{z^2+\sqrt{2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \psi(t)=(2+\sqrt{2})\,L^{-1}\left[\frac{z}{z^2-\sqrt{2}}\right]+(2-\sqrt{2})\,L^{-1}\left[\frac{z}{z^2+\sqrt{2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \psi(t)=(2+\sqrt{2})\,ch\,(2^{\frac{1}{4}}t)+(2-\sqrt{2})\cos(2^{\frac{1}{4}}t)$$

وبذلك يتحقق المطلوب...

تمرين (2) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التكاملية التالية:

$$\psi''(t)-4\int_0^t e^{-(t-s)}\,[\psi'(s)+\psi(s)].ds=0$$

المزودة بالشروط الابتدائية

$$\psi(0)=0 \qquad \psi'(0)=12$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المعروضة نجد أنه:

$$L\left[\psi''(t)-4\int_0^t e^{-(t-s)}\,[\psi'(s)+\psi(s)].ds\right]=0$$

باستخدام خاصية الخطية نجد:

$$L[\psi''(t)]-4L\left[\int_0^t e^{-(t-s)}\,[\psi'(s)+\psi(s)].ds\right]=0 \quad \dots(1)$$

لكن: من خواص تحويلات لابلاس:

$$L[\psi''(t)]=z^2\varphi(z)-z\psi(0)-\psi'(0)=z^2\varphi(z)-12$$

$$L[\psi'(t)] = Z\,\Psi(Z) - \psi(0) = Z\,\Psi(Z)$$

$$L\left[\int_0^t e^{-(t-s)}[\psi'(s)+\psi(s)].ds\right] \underset{\downarrow}{=} L[e^{-t}].L[\psi'(s)+\psi(s)]$$

من مبرهنة الالتفاف

$$L[e^{-t}].L[\psi'(s)+\psi(s)] = \frac{1}{Z+1}[Z\,\Psi(Z)+\Psi(Z)] = \Psi(Z)$$

بالعودة إلى (1) نجد :

$$Z^2\,\Psi(Z) - 12 - 4\,\Psi(Z) = 0$$

$$\Longrightarrow \Psi(Z) = \frac{12}{Z^2-4}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي :

$$L^{-1}[\Psi(Z)] = L^{-1}\left[\frac{12}{Z^2-4}\right] = 6\,L^{-1}\left[\frac{2}{Z^2-4}\right] = 6\,Sh(2t)$$

$$\Longrightarrow \psi(t) = 6\,Sh(2t)$$

وبذلك يتم المطلوب...

تمرين (3) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التكاملية التالية :

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int_0^x Cos(x-t)\,\varphi''(t).dt$$

$$+ 2\int_0^x Sin(x-t)\,\varphi'(t).dt = Cos\,x$$

المزودة بالشروط الابتدائية :

$$\varphi'(0) = \varphi(0) = 0$$

الحل : نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المعروضة فنجد :

$$L\left[\varphi''(x)-2\varphi'(x)+\varphi(x)+2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''.dt\right.$$

$$\left.+2\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t).dt\right]=L[\cos x]$$

بالإستفادة من خاصية الخطية نجد:

$$L[\varphi''(x)]-2L[\varphi'(x)]+L[\varphi(x)]+2L\left[\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t).dt\right]$$

$$+2L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t).dt\right]=L[\cos x] \quad \dots(1)$$

لكن نعرف أنّ:

$$L[\varphi(x)]=L[\varphi(t)]=\phi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[\varphi'(x)]=z\,\phi(z)-\varphi(0)=z\,\phi(z)$$

$$L[\varphi''(x)]=z^2\,\phi(z)-z\,\varphi(0)-\varphi'(0)=z^2\,\phi(z)$$

$$L\left[\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t).dt\right]=L[\cos x].L[\varphi''(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

وجدنا أنّ:

$$L[\varphi''(t)]=z^2\,\phi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[\cos x]=\frac{z}{z^2+1}$$

ومنه:

$$L\left[\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t).dt\right]=\frac{z^3}{z^2+1}\,\phi(z)$$

$$L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)dt\right]=L[\sin x].L[\varphi'(t)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

ومبنا أنّ: $L[\varphi'(t)] = z\,\phi(z)$

ونعلم أنّ: $L[\sin x] = \dfrac{1}{z^2+1}$

ومنه: $L\left[\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt\right] = \dfrac{z}{z^2+1}\,\phi(z)$

بتعويض كل ما سبق في (1) نجد:

$$z^2\phi(z) - 2z\,\phi(z) + \phi(z) + \frac{2z^3}{z^2+1}\,\phi(z)$$

$$+\frac{2z}{z^2+1}\,\phi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \Big(z^2 - 2z + 1 + \underbrace{\frac{2z^3}{z^2+1} + \frac{2z}{z^2+1}}_{=2z}\Big)\phi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow (z^2+1)\,\phi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \phi(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أنّ:

$$\varphi(x) = L^{-1}[\phi(z)] = L^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+1)^2}\right]$$

نعلم أنّ: $L[\sin x] = \dfrac{1}{z^2+1}$

ومن خاصية الضرب بـ x^n لدينا:

$$L[x\sin x] = (-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = (-1)\left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} L[x\sin x] = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{2} x \sin x = L^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+1)^2}\right]$$

ومنه: $\varphi(x) = \frac{1}{2} x \sin x$

وهو حل المعادلة المفروضة، وبذلك يتم المطلوب...

تمرين (4) حل المعادلة التفاضلية التكاملية التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\psi''(t) + 2\psi'(t) - 2\int_0^t \sin(t-s).\psi'(s).ds = \cos t$$

المزودة بالشروط الابتدائية:

$$\psi'(0) = \psi(0) = 0$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة فنجد:

$$L\left[\psi''(t) + 2\psi'(t) - 2\int_0^t \sin(t-s)\,\psi'(s)\,ds\right] = L[\cos t]$$

من خاصية الخطية نجد:

$$(1)\dots\ L[\psi''(t)] + 2L[\psi'(t)] - 2L\left[\int_0^t \sin(t-s)\,\psi'(s)\,ds\right] = L[\cos t]$$

لكن: نفرض أنه:

$$L[\psi(x)] = \Psi(z)$$

ونعلم أنه:

$$L[\psi'(t)] = z\,\Psi(z) - \psi(0) = z\,\Psi(z)$$

$$L[\psi''(t)] = z^2\Psi(z) - z\,\psi(0) - \psi'(0) = z^2\,\Psi(z)$$

$$L\left[\int_0^t \sin(t-s)\,\psi'(s).ds\right] = L[\sin t].L[\psi'(s)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

وجدنا سابقاً أنّ:

$$L[\psi'(s)] = z\,\psi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L[\sin t] = \frac{1}{z^2+1}$$

وبالتطابق:

$$L\left[\int_0^t \sin(t-s)\,\psi'(s)\,ds\right] = \frac{z}{z^2+1}\,\psi(z)$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$z^2\,\psi(z) + 2z\,\psi(z) - \frac{2z}{z^2+1}\,\psi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\longrightarrow \left(z^2+2z-\frac{2z}{z^2+1}\right)\psi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{z^4+z^2+2z^3+2z-2z}{z^2+1}\right)\psi(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$\Longrightarrow (z^4+2z^3+z^2)\,\psi(z) = z$$

$$\longrightarrow \psi(z) = \frac{z}{z^4+2z^3+z^2} = \frac{1}{z^3+2z^2+z}$$

$$\Longrightarrow \psi(z) = \frac{1}{z(z^2+2z+1)} = \frac{1}{z(z+1)^2}$$

لنفرق الكسر الأخير:

$$\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z+1)} + \frac{C}{(z+1)^2}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$1 = A(z+1)^2 + Bz(z+1) + Cz$$

$$1 = A(z^2+2z+1) + B(z^2+z) + Cz$$

$$1 = (A+B)z^2 + (2A+B+C)z + A$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{array}\right\} \quad A=1 \ , \ B=-1 \ , \ C=-1$$

ومنه:

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}$$

والآن بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$(2)\ldots \quad \psi(t) = L^{-1}[\Psi(z)] = L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

ونعلم أنّ:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = 1 \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right] = e^{-t}$$

من خاصية الضرب بـ t^n لدينا:

$$L[te^{t}] = (-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right) = (-1)\frac{-1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\Longrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right] = t.e^{t}$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$\psi(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

وهو حل المعادلة المفروضة، وبذلك يتم المطلوب...

تمرين (5) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التكاملية التفاضلية التالية:

$$225\,y''(t) - 16\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\,y'(s).ds = -15\sin\frac{t}{3}$$

حيث:

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = \frac{1}{5}$$

الحل: لنأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة فنجد:

$$L\left[225\,y''(t) - 16\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\,y'(s).ds\right] = L\left[-15\sin\frac{t}{3}\right]$$

من خاصية الخطية نجد:

$$(1)\ldots\quad 225\,L[y''(t)] - 16\,L\left[\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\,y'(s).ds\right] = -15\,L\left[\sin\frac{t}{3}\right]$$

نفرض أنّ:

$$L[y(t)] = L[y(s)] = \Psi(z)$$

ولدينا:

$$L[y''(t)] = z^2\,\Psi(z) - z\,y(0) - y'(0) = z^2\,\Psi(z) - \frac{1}{5}$$

$$L[y'(t)] = z\,\Psi(z) - y(0) = z\,\Psi(z)$$

$$L\left[\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\,y'(s).ds\right] \underset{\downarrow}{=} L\left[\cos\frac{t}{3}\right].L[y'(s)]$$

"من مبرهنة الالتفاف"

وجدنا أنّ:

$$L[y'(s)] = z\,\Psi(z)$$

ونعلم أنّ:

$$L\left[\cos\frac{t}{3}\right] = \frac{z}{z^2+\frac{1}{9}} = \frac{9z}{9z^2+1}$$

ومنه:

$$L\left[\int_0^t \cos\frac{t-s}{3}\,y'(s)\,ds\right] = \frac{9z}{9z^2+1}\,z\,\Psi(z)$$

$$L\left[\sin\frac{t}{3}\right]=\frac{1/3}{z^2+1/9}$$

بتعويض كل ما سبق في (1) نجد:

$$225\left(z^2\Psi(z)-\frac{1}{5}\right)-16\left(\frac{9z^2}{9z^2+1}\right)\Psi(z)=-15\,\frac{1/3}{z^2+1/9}$$

$$225z^2\Psi(z)-45-\frac{144z^2}{9z^2+1}\Psi(z)=-5\,\frac{9}{9z^2+1}$$

$$\Psi(z)\left[225z^2-\frac{144z^2}{9z^2+1}\right]=45-\frac{45}{9z^2+1}$$

$$\Psi(z)\left[\frac{2025z^4+225z^2-144z^2}{9z^2+1}\right]=\frac{405z^2+45-45}{9z^2+1}=\frac{405z^2}{9z^2+1}$$

$$\Psi(z)=\frac{405z^2}{2025z^4+81z^2}=\frac{45z^2}{225z^4+9z^2}=\frac{5}{25z^2+1}=\frac{\frac{1}{5}}{z^2+\frac{1}{25}}$$

نقسم البسط والمقام على 9

$$\Longrightarrow\quad \Psi(z)=\frac{\frac{1}{5}}{z^2+\frac{1}{25}}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\psi(t)=L^{-1}[\Psi(z)]=L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}}{z^2+\frac{1}{25}}\right]=\sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad \psi(t)=\sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

وهو الحل للمعادلة المفروضة، وبذلك يتم المطلوب...

انتهت المحاضرة...

إعداد: إيناس دليل...