المحاضرة الثانية 4 / 10 / 2017

جبر لي :

يعود مفهوم جبر لي إلى العالم النرويجي ماريوس سوفوس لي (١٨٤٢ - ١٨٩٩)

تعريف: إن جبر لي هو مقاس (موديول) A على حلقة واحدية تبديلية R مزود بقانون تشكيل داخلي يرمز له $[\,,\,]$:

$$[\,,\,] : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longmapsto [x,y]$$

حيث يحقق الموضوعات الخمس التالية:

(1) $[x,x] = 0$

(2) $[x+y, z] = [x,z] + [y,z]$ (الموديول A)

(3) $[x, y+z] = [x,y] + [x,z]$

E فضاء شعاعي

$f : E \to E$

$\alpha \in R : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\Leftarrow f$ تطبيق خطي

(4) $[\lambda x, y] = \lambda[x,y] = [x, \lambda y] \quad , \forall \lambda \in R$

(5) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ ← صفر للموديل (المقاس)

وذلك $\forall x,y,z \in A \quad , \quad \forall \lambda \in R$

ملاحظة: يمكن صياغة تعريف جبر لي بأنه مقاساً A على حلقة واحدية تبديلية R مزود بتطبيق خطاني حيث يحقق الخاصة (1) و (5)

ندعو الخاصة (5) بمطابقة جاكوبي.

تذكرة: التطبيق الثنائي الخطية (الخطاني) هو تطبيق يكون خطي بالنسبة للمركبة الأولى وخطي بالنسبة للمركبة الثانية أي من الشكل:

$$f : E \times E \to E$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y) \quad . \quad f(x+x', y) = f(x,y) + f(x',y)$

$f(x, \alpha y) = \alpha f(x,y) \quad . \quad f(x, y+y') = f(x,y) + f(x,y')$

Alamal

جبر لي التبادلي:

تعريف: يقال عن جبر لي A إنه تبادلي إذا اتصف بالخاصة التالية:
$[A,A]=\{0\}$ بتعبير آخر: إذا حققه $[x,y]=0,\ \forall x,y\in A$.

من جهة أخرى يبرهن على أنه إذا كان A جبر لي فإن $[x,y]=-[y,x]$
وذلك $\forall x,y\in A$

نظرية: ليكن A جبر لي. عندئذ الخواص التالية محققة:

• $[x,y]=-[y,x]$

•• $[x,[y,z]]=[y,[x,z]]+[z,[y,x]]$

وذلك مهما يكن x,y,z من A.

البرهان:

لدينا $[x+y,x+y]=0$ بالاستفادة من كون التطبيق ثنائي الخطية
نجد أن:

$$=[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x]$$

$$\Rightarrow [x,y]=-[y,x]$$

استناداً إلى متطابقة جاكوبي والخاصة الأولى نجد أن:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

مطابقة جاكوبي

$$[x,[y,z]]=-[y,[z,x]]-[z,[x,y]]$$

$$=[y,-[z,x]]+[z,-[x,y]]$$

حسب الخاصة الأولى

$$=[y,[x,z]]+[z,[y,x]]$$

هنالك أمثلة متعددة على جبر لي يمكن للطالب العودة إلى الكتاب من أجل ال

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(\alpha x)=\alpha f(x)$$
$$f[x,y]=[f(x),f(y)]$$

/ /

التشاكل بين جبري لي:

← تعريف: ليكن A' ، A جبري لي على حلقة واحدية تبادلية A
نقول عن التطبيق $f: A \to A'$ إنه تشاكل بين جبري لي A' ، A
إذا حقق الشروط الثلاث التالية:

$$f(x \overset{A}{+} y) = f(x) \overset{A'}{+} f(y)$$

$$f(\alpha \overset{A}{\cdot} x) = \alpha \overset{A'}{\cdot} f(x)$$

$$f\overset{A}{[x,y]} = \overset{A'}{[f(x), f(y)]}$$

التشاكل بين مودولين هو تطبيق مستقر بالنسبة لقانون التشكيل الداخلي ومستقر بالنسبة لقانون التشكيل الخارجي

بتعبير آخر: يعرف التشاكل بين جبري لي على أنه تطبيق خطي ويحقق الشرط الثالث

جبور لي خاصة:
لنأخذ المجموعة $M(n,\mathbb{C})$ أو $M_n(\mathbb{C})$ مجموعة المصفوفات المربعة
من المرتبة n على حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$
نعلم من خلال دراسة سابقة إن هذه المجموعة تشكل مقاس على $\mathbb{C}$
بالنسبة لعملية جمع المصفوفات والمضاعف السلمي لمصفوفة.
من جهة أخرى لنزود هذه المجموعة بقانون تشكيل داخلي آخر معرف
بالصيغة:

$$[\,,\,]: M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$
$$(M, M') \longmapsto [M, M'] = M.M' - M'M$$

لنتأكد من صحة الشروط الخمسة الواردة في تعريف جبور لي

(1) $[M,M] \underset{\text{حسب التعريف}}{=} MM - MM = 0 \rightarrow$ المصفوفة الصفرية

(2) $[M+M', M''] \overset{?}{=} [M,M''] + [M',M''] \; ; \; M, M', M'' \in M_n(\mathbb{C})$

Alamal

$$[M+M', M''] \overset{\text{التعريف}}{=} (M+M').M'' - M''(M+M')$$

$$= MM'' + M'M'' - M''M - M''M'$$

$$= M.M'' - M''M + M'M'' - M''.M'$$

$$= [M, M''] + [M', M''] \rightarrow \text{صحيحة}$$

(3) $[M, M' + M''] \overset{?}{=} [M, M'] + [M, M'']$

$$[M, M'+M''] = M.(M'+M'') - (M'+M'').M$$

$$= MM' + MM'' - M'.M - M''.M$$

$$= MM' - M'.M + MM'' - M''.M$$

$$= [M, M'] + [M, M''] \rightarrow \text{محققة}$$

(4) $[\lambda M, M'] \overset{?}{=} \lambda [M, M'] \quad ; \lambda \in \mathbb{C}$

$$[\lambda M, M'] = (\lambda M) M' - M'(\lambda M)$$

$$= \lambda(M.M') - \lambda(M'.M)$$

$$= \lambda(MM' - M'.M)$$

$$= \lambda [M, M']$$

$$(5)\quad [M,[M',M'']] + [M',[M'',M]] + [M'',[M,M']] \overset{?}{=} 0$$

$$\bullet\ [M,[M',M'']] = M.[M',M''] - [M',M''].M$$

$$= M.(M'M'' - M''M') - (M'M'' - M''M').M$$

$$= M.M'M'' - M.M''M' - M'.M''M + M''.M'M$$

$$\bullet\ [M',[M'',M]] = M'[M'',M] - [M'',M].M'$$

$$= M'(M''.M - MM'') - (M''.M - MM'').M'$$

$$= M'M''M - M'.M.M'' - M''M.M' + M.M''M'$$

$$[M'',[M,M']] = M''[M,M'] - [M,M']M''$$

$$= M''(MM' - M'M) - (MM' - M'M).M''$$

$$= M''M.M' - M''M'M - MM'M'' - M'M.M''$$

$$\mathcal{L}_1 = \underline{MM'M''} - \underline{\underline{MM''M'}} - \underline{M'M''M} + \underline{\underline{M''M'M}}$$
$$+ \underline{M'M''M} - \underline{M'MM''} - \underline{\underline{M''MM'}} + \underline{\underline{MM''M'}}$$
$$+ \underline{\underline{M''MM'}} - \underline{\underline{M''M'M}} - \underline{MM'M''} - \underline{M'MM''}$$

مطابقة جاكوبي محققة ← $= 0 = \mathcal{L}_2$

يتضح مما سبق أن مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل C يشكل جبر لي وهنالك جبور لي أكثر أهمية سوف نتطرق لها في سياق هذا المقرر

لبرهان أن التطبيق تطبيق اشتقاق نبرهن أنه ① تراكل

② يحقق العلاقة

$d[x,y] = [dx,y] + [x,dy]$

تطبيقات الاشتقاق على جبرلي:

تعريف: ليكن A جبرلي على حلقة واحدية تبديلية R.

إن تطبيق الاشتقاق على A هو تراكل (تشاكل منطلقه نفس مستقره) d على المقاس A ويحقق العلاقة التالية:

$$d : A \to A$$

$$* \; d[x,y] = [dx,y] + [x,dy]$$

بتعبير آخر:

$d : A \to A$ تطبيق اشتقاق

$$\Rightarrow \begin{cases} \cdot\, d(x+y) = dx + dy \\ \cdot\cdot\, d(\alpha x) = \alpha\, dx \\ \cdot\cdot\cdot\, d[x,y] = [dx,y] + [x,dy] \end{cases}$$

تطبيق الاشتقاق

السطران الأولان: تشاكل (تراكل)

نرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على A بالرمز $Der(A)$

سنبين في المحاضرة القادمة إن هذه المجموعة تشكل جبرلي

نزود هذه المجموعة ب:

$$+ : Der(A) \times Der(A) \to Der(A)$$

$$(d,d_1) \mapsto d + d_1$$

للتحقق من مجموع تراكلين على المقاس A هو تراكل على A تطبيق اشتقاق

$$d + d_1 : A \to A$$

$$(d+d_1)(x) = d(x) + d_1(x)$$

$$\cdot : R \times Der(A) \to Der(A)$$

$$(\alpha, d) \mapsto \alpha . d$$

$$\alpha . d : A \to A$$

$$(\alpha.d)(x) = \alpha . d(x)$$

قانون التشكيل الخارجي المرشح لكي ل $Der(A)$

قانون التشكيل الخارجي لـ A

$$[\,,\,] : Der(A) \times Der(A) \to Der(A)$$

$$[d,d_1] = d \circ d_1 - d_1 \circ d$$

Alamal

A ، $+$ ، $.$ ، $[\,,\,]$ جبرلي على R

$Der(A)$ ، $+$ ، $.$ ، $[\,,\,]$ جبرلي

نثبت أن مجموع تداكلين هو تداكل $\Leftarrow d_1+d_2 \in Der(A)$

ونثبت أن αd تداكل

$d + d_1 = d_1 + d$

$(d + d_1)(x) = (d_1 + d)(x) \quad , \forall x \in A$

$d(x) + d_1(x) = d_1(x) + d(x) = (d_1 + d)(x)$

$(d + d_0) = d$

$(d + d_0)(x) = d(x) \overset{A}{+} d_0(x) = d(x) + 0 = d(x)$

المحاضرة الثالثة 9/10/2017

مراجعة:

* نعرف جبر لي A على حلقة واحدية تبادلية R بأنه مقاس على الحلقة ذاتها مزود بتطبيق خطي (ثنائي الخطية) يرمز له بـ $[\,,\,]$ بحيث يتحقق $[x,x]=0$ أياً كان x من A ومتطابقة جاكوبي

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad ; \forall x,y,z\in A$$

قانون التشكيل الداخلي للزمرة — قانون التشكيل الداخلي — صفر الزمرة التبديلية

يعود مفهوم جبر لي إلى العالم النرويجي سوفوس لي

$(A,[\,,\,])$ $\quad [\,,\,]:A\times A\to A$

$(\mathbb{R},\mathbb{C})$

* يبرهن على أنه إذا كان A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R فإن $[x,y]=-[y,x]:\forall x,y\in A$

ويقال عن جبر لي إنه تبادلي إذا كان $[A,A]=0$ أي

$\forall x,y\in A:\ [x,y]=0$

* نعرف التشاكل بين جبري لي A, A' على أنه تشاكل $f:A\to A'$ بين المقاسين A, A' ويحقق الشرط الإضافي:

$f(\underset{A}{[x,y]})=\underset{A'}{[f(x),f(y)]}$ (يحافظ على قانون التشكيل الداخلي الثاني)

* هنالك جبور لي خاصة سنأتي على ذكرها تباعاً من أهمها حالياً $M_n(\mathbb{C})$ جبر لي المؤلف من مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n على حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$

في الحقيقة $M_n(\mathbb{C})$ هو مقاس على الحقل $\mathbb{C}$ نزود هذا المقاس بتطبيق ثنائي الخطية كما يلي:

$[\,,\,]:M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$

$(M_1,M_2)\mapsto[M_1,M_2]=M_1M_2-M_2M_1$

يبرهن على أن $M_n(\mathbb{C})$ يشكل جبر لي.

/ /

تطبيقات الاشتقاق على جبر لي:

لتكن A جبر لي ، نعرف تطبيق الاشتقاق بأنه تراكل d على الماس A
$d: A \to A$
ويحقق العلاقة

$$d[x,y] = [dx,y] + [x,dy] \ ; \ \forall x,y \in A$$

سنرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق على A بالرمز $Der(A)$ (Derivation)

إن الهدف أن نجعل من هذه المجموعة جبر لي

* إن $Der(A)$ مقاس على الحلقة الواحدية التبادلية $\mathbb{R}$

نزود المجموعة $Der(A)$ بقانوني التشكيل التاليين:

الداخلي: $+ : Der(A) \times Der(A) \to Der(A)$

$(d_1, d_2) \mapsto d_1 + d_2 : A \to A$

$x \mapsto (d_1+d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$

(1) لنبرهن أن $d_1 + d_2 \in Der(A)$ أي لنبرهن أنه معرف جيداً :

(d_1+d_2 تراكل ويحقق العلاقة)

$d_1 + d_2 : A \to A$

$(d_1+d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$

• إن $d_1 + d_2$ تراكل على A (مجموع تراكلين على الماس A هو تراكل) $d(x+y) = d(x) + d(y)$ ، $d(\alpha x) = \alpha d(x)$

(1) $(d_1+d_2)(x+y) \underset{\text{حسب تعريف } d_1+d_2}{=} d_1(x+y) + d_2(x+y)$

$= d_1(x) + d_1(y) + d_2(x) + d_2(y)$ كون d_1 و d_2 تراكل

$= (d_1+d_2)(x) + (d_1+d_2)(y)$ حسب تعريف d_1+d_2

(2) $(d_1+d_2)(\alpha x) \overset{\text{حسب تعريف } d_1+d_2}{=} d_1(\alpha x) + d_2(\alpha x)$

$= \alpha d_1(x) + \alpha d_2(x)$ كون d_1 ، d_2 تراكلين

$= \alpha (d_1(x) + d_2(x))$

$= \alpha (d_1+d_2)(x)$ حسب تعريف d_1+d_2

إذاً $d_1 + d_2$ تراكل ، $\forall x,y \in A \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$

Alamal

/ /

• إن d_1+d_2 تحقق العلاقة الواردة في التعريف

أي لنثبت أن:

$$(d_1+d_2)[\underset{A}{x,y}] = [\underset{A}{(d_1+d_2)(x),y}] + [\underset{A}{x,(d_1+d_2)(y)}],\ \forall x,y\in A$$

$L_1 = (d_1+d_2)[x,y] =$ حسب تعريف d_1+d_2 $= d_1[x,y] + d_2[x,y]$

كون d_1 و d_2 تطبيقا اشتقاق $= [d_1x,y] + [x,d_1y] + [d_2x,y] + [x,d_2y]$

$= [d_1x,y] + [d_2x,y] + [x,d_1y] + [x,d_2y]$

حسب تعريف $[\,,\,]$ على A $= [d_1x+d_2x,y] + [x,d_1y+d_2y]$

حسب تعريف d_1+d_2 $= [(d_1+d_2)(x),y] + [x,(d_1+d_2)(y)]$

$= L_2$

مما سبق نجد أن $d_1+d_2 \in Der(A)$ تطبيق اشتقاق

الخارجي $\cdot : R\times Der(A) \longrightarrow Der(A)$

$(\lambda, d) \longmapsto \lambda.d : A \to A$

$\forall \lambda\in R,\ x\in A,\ d\in Der(A)\quad x \longmapsto (\lambda.d)(x) = \lambda.d(x)$

قانون التشكيل الخارجي مجموعة مؤثراته من اليسار الحلقة R.

(2) لنبرهن أن $\lambda.d\in Der(A)$ (أي معرف جيداً)

• أي لنبرهن أن $\lambda.d$ تداكل وتحقق العلاقة الواردة في التعريف

$$(1)\ (\lambda.d)(x+y) \overset{\text{حسب تعريف } \lambda d}{=} \lambda.\ d(x+y)$$

كون d تداكل $= \lambda.(d(x)+d(y))$

كون A مقاس $= \lambda.d(x) + \lambda.d(y)$

حسب تعريف $\lambda.d$ $= (\lambda.d)(x) + (\lambda.d)(y)$

$\forall x,y\in A$
$\forall \lambda\in R$

$(2)\ (\lambda d)(\alpha x) = \lambda.\ d(\alpha x)$ حسب تعريف $\lambda.d$

كون d تداكل $= (\overset{\in R}{\lambda}.\overset{\in R}{\alpha})d(\overset{\in A}{x})$

كون R حلقة تبديلية $= (\overset{\in R}{\alpha}.\lambda)d(\overset{\in A}{x})$

كون A مقاس $= \alpha(\lambda d(x))$

$= \alpha((\lambda d)(x))$

Alamal

إذاً $\lambda.d$ تداكل

• إن $\lambda.d$ تحقق العلاقة الواردة في التعريف أي:

$$(\lambda.d)[x,y] = [(\lambda.d)(x), y] + [x, (\lambda.d)(y)]$$

حسب تعريف $\lambda.d$

$$L_1 = (\lambda.d)[x,y] \stackrel{1}{=} \lambda.(d[x,y])$$

كون d تطبيق اشتقاقي $= \lambda.([dx,y] + [x,dy])$

جبر لي A مقاس A $= \lambda.[dx,y] + \lambda.[x,dy]$

ثنائي الخطية لأن A جبر لي $[,] = [\lambda dx, y] + [x, \lambda dy]$

حسب تعريف $\lambda.d$ $= [(\lambda.d)(x), y] + [x, (\lambda.d)(y)]$

$= L_2$

ما سبق نجد أن $\lambda.d \in Der(A)$ تطبيق اشتقاقي على A

(3) لنبرهن الشروط الخمسة الواردة في تعريف المودول (المقاس)

• إن $(Der(A), +)$ زمرة تبديلية:

• قانون التشكيل + الداخلي المعرف على $Der(A)$ داخلي

$$\forall\, d_1, d_2 \in Der(A) : d_1 + d_2 \in Der(A)$$

وقد تم إثبات ذلك.

.. العنصر المحايد موجود وهو: $d_0 : A \to A$

$$d_0(x) = 0_A$$

$$\forall\, d \in Der(A) : (d_0 + d)(x) = d_0(x) + d(x) = 0_A + d(x) = d(x)$$

$$(d + d_0)(x) = d(x) + d_0(x) = d(x) + 0_A = d(x)$$

... لكل عنصر من $Der(A)$ نظير جمعي: $-d : A \to A \in (A)$

في $Der(A)$ $x \mapsto (-d)(x) = -d(x)$

$$(d + (-d))(x) = d(x) - d(x) = 0_A$$

$$(-d + d)(x) = -d(x) + d(x) = 0_A$$

/ /

إن كلاً من $d_0 \in Der(A)$, d هو تطبيق اشتقاقي لأن كلاهما تراكل

. $d_0(x+y) = O_A$ و $d_0(x) + d_0(y) = O_A + O_A = O_A$

. $d_0(\underset{A\ni}{\alpha x}) = O_A$, $\alpha d_0(x) = \alpha . O_A = O_A$

حسب مبرهنة: A معدول على حلقة R عندئذ:

$O_R . a = O_A$; $a \in A$

$\alpha . O_A = O_A$; $\alpha \in R$

. $d_0[x,y] = O_A$

$[d_0(x), y] + [x, d_0(y)] = [O_A, y] + [x, O_A]$

d تطبيق اشتقاقي لأن $\lambda . d$ تطبيق اشتقاقي $\forall \lambda \in R$

وذلك باعتبار $\lambda = -1$

..... قانون التشكيل (+) المعرف على $Der(A)$ تبديلي:

$\forall d_1, d_2 \in Der(A)$: $d_1 + d_2 \in Der(A)$

$(\underset{Der(A)}{d_1 + d_2})(x) = \underset{A\ni}{d_1(x)} \underset{A}{+} \underset{A\ni}{d_2(x)}$

كون A تبديلي $(A,+)$ زمرة $= d_2(x) + d_1(x)$

$= (d_2 + d_1)(x)$

..... (+) تجميعي:

$\forall d_1, d_2, d_3 \in Der(A), \forall x \in A$:

$[d_1 + (d_2 + d_3)](x) = d_1(x) + (d_2 + d_3)(x)$

$= \underset{A\ni}{d_1(x)} + (\underset{A\ni}{d_2(x)} + \underset{A\ni}{d_3(x)})$

كون A متجانس فإن $(A,+)$ زمرة $= (d_1(x) + d_2(x)) + d_3(x)$

$\Leftarrow$ (+) المعرف على A تجميعي $= (d_1 + d_2)(x) + d_3(x)$

$= ((d_1 + d_2) + d_3)(x)$

/ /

واستنتجنا أن $(Der(A),+)$ زمرة تبديلية

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall d_1, d_2 \in Der(A)$; $\forall x \in A$

$\cdot\cdot\ 1_{\mathbb{R}} \cdot d_1 \overset{?}{=} d_1$

$\mathbb{R} \ni \quad Der(A) \ni$

$1_{\mathbb{R}} \cdot d_1 : A \longrightarrow A$

حسب قانون التشكيل الخارجي

$x \longmapsto (1_{\mathbb{R}} d_1)(x) = 1_{\mathbb{R}} \cdot d_1(x) \in A$

كون A مقاس

$\Rightarrow (1_{\mathbb{R}} \cdot d_1)(x) = 1_{\mathbb{R}} \cdot d_1(x) = d_1(x) \Rightarrow 1_{\mathbb{R}} \cdot d_1 = d_1$

$\mathbb{R} \ni \quad A \ni$ مقاس A

$\cdots\ (\alpha + \beta) d_1 \overset{?}{=} \alpha d_1 + \beta d_1$

$\mathbb{R} \ni \quad Der(A) \ni$

$(\alpha+\beta) d_1 : A \longrightarrow A$

$x \longmapsto ((\alpha+\beta) d_1)(x)$

$= (\alpha+\beta) \, d_1(x)$

$(\alpha+\beta) \cdot d_1(x) = \alpha d_1(x) + \beta d_1(x)$

$\mathbb{R} \ni \quad A \ni$ مقاس A

$\cdots\ \alpha (d_1 + d_2) \overset{?}{=} \alpha d_1 + \alpha d_2$

$\mathbb{R} \ni \quad Der(A) \ni$

$\alpha(d_1 + d_2) : A \longrightarrow A$

$x \longmapsto \alpha(d_1+d_2)(x)$

$= \alpha d_1(x) + \alpha d_2(x)$

$(\alpha \cdot (d_1 + d_2))(x) = \alpha \cdot (d_1 + d_2)(x)$

حسب تعريف قانون التشكيل الخارجي على $Der(A)$

حسب تعريف (+) على $Der(A)$ (قانون التشكيل الداخلي) $= \alpha \cdot (d_1(x) + d_2(x))$

$\mathbb{R} \ni \quad A \ni \quad A \ni$

كون A مقاس $= \alpha \cdot d_1(x) + \alpha \cdot d_2(x)$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot d_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot d_1) \in Der(A)$

$Der(A) \ni \quad \mathbb{R} \ni \quad Der(A) \ni$

lamal

/ /

$$\left((\widehat{\alpha\cdot\beta})\cdot d_1\right)(x) \underset{\downarrow}{=} (\alpha\cdot\beta)\cdot d_1(x) \underset{\downarrow}{=} \alpha\cdot\left(\beta\cdot d_1(x)\right) = \alpha\left((\beta d_1)(x)\right)$$

حسب تعريف (·) على $Der(A)$ A مقاس على $\mathbb{R}$ لأن A مقاس

واستنتج أن $Der(A)$ مقاس على الحلقة الواحدية التبديلية $\mathbb{R}$).

*** نظريـــة:**

إن المقاس $Der(A)$ المؤلف من مجموعة تطبيقات الاشتقاق على $\mathbb{R}$ هو جبر لي

(إذا كان A جبر لي عندئذ $Der(A)$ يكون أيضاً جبر لي)

البرهان: ① نبرهن أنه تطبيق اشتقاق ② نبرهن أنه جبر لي — تحقيقه العلاقة

(إن $Der(A)$ مقاس على $\mathbb{R}$)

لنزود المقاس $Der(A)$ بقانون تشكيل داخلي يرمز له $[\,,\,]$ المعرف بالشكل:

$$[\,,\,] : Der(A)\times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$
$$(d_1,d_2) \longmapsto [d_1,d_2] = d_1\circ d_2 - d_2\circ d_1$$

إن $[\,,\,]$ هو تطبيق معرف جيداً

أي $[d_1,d_2]$ هو تطبيق اشتقاق على A لأن:

$$[d_1,d_2] : A \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto [d_1,d_2](x) = d_1\circ d_2(x) - d_2\circ d_1(x)$$

• $[d_1,d_2]$ تداكل على A

$\forall x,y\in A$

$$[d_1,d_2](x+y) = (d_1\circ d_2)(x+y) - (d_2\circ d_1)(x+y)$$
$$= d_1\left(d_2(x+y)\right) - d_2\left(d_1(x+y)\right)$$

d_1, d_2 تداكلين

$$= d_1\left(\underset{\in A}{d_2(x)} + d_2(y)\right) - d_2\left(\overset{\in A}{d_1(x)+d_1(y)}\right)$$
$$= d_1(d_2(x)) + d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(x)) - d_2(d_1(y))$$

$$= d_1(d_2(x)) - d_2(d_1(x)) + d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(y))$$
$$= d_1 o d_2(x) - d_2 o d_1(x) + d_1 o d_2(y) - d_2 o d_1(y)$$
$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$$

$$- [d_1, d_2](\alpha x) = (d_1 o d_2)(\alpha x) - (d_2 o d_1)(\alpha x)$$
$$= d_1(d_2(\alpha x)) - d_2(d_1(\alpha x))$$

كون d_1, d_2 تراكلين $= d_1(\underbrace{\alpha d_2(x)}_{\in A}) - d_2(\underbrace{\alpha d_1(x)}_{\in A})$

$$= \alpha d_1(d_2(x)) - \alpha d_2(d_1(x))$$
$$= \alpha (d_1 o d_2)(x) - \alpha (d_2 o d_1)(x)$$
$$= \alpha (d_1 o d_2(x) - d_2 o d_1(x))$$
$$= \alpha [d_1, d_2](x)$$

* إذاً $[d_1, d_2]$ تراكل على A

** لنبرهن أن $[d_1, d_2]$ يحقق العلاقة :

$$[d_1, d_2][x, y] = [[d_1, d_2](x), y] + [x, [d_1, d_2](y)]$$

$$= [d_1, d_2][x, y] = (d_1 o d_2)[x, y] - (d_2 o d_1)[x, y]$$

$$= d_1(d_2[x, y]) - d_2(d_1[x, y])$$

d_1, d_2 تطبيقا اشتقاق على A $= d_1([d_2 x, y] + [x, d_2 y])$

$$- d_2([d_1 x, y] + [x, d_1 y])$$
$$= d_1[d_2 x, y] + d_1[x, d_2 y]$$
$$- d_2[d_1 x, y] - d_2[x, d_1 y]$$

d_1, d_2 تطبيقا اشتقاق على A ($\in Der(A)$) $= [d_1(d_2 x), y] + \underline{[d_2 x, d_1 y]}$

$$+ \underline{[d_1 x, d_2 y]} + [x, d_1(d_2 y)]$$
$$- [d_2(d_1 x), y] - \underline{[d_1 x, d_2 y]}$$
$$- \underline{[d_2 x, d_1 y]} - [x, d_2(d_1 y)]$$

$= [d_1 o d_2(x), y] + [x, d_1 o d_2(y)]$

$- [d_2 o d_1(x), y] - [x, d_2 o d_1(y)]$

$= [d_1 o d_2(x), y] - [d_2 o d_1(x), y]$

$+ [x, d_1 o d_2(y)] - [x, d_2 o d_1(y)]$

تطبيق $[,]$ خطي $= [d_1 o d_2(x) - d_2 o d_1(x), y] + [x, d_1 o d_2(y) - d_2 o d_1(y)]$

$= [(d_1 o d_2 - d_2 o d_1)(x), y] + [x, (d_1 o d_2 - d_2 o d_1)(y)]$

$= [[d_1, d_2](x), y] + [x, [d_1, d_2](y)] = L_2$

من * و ** نجد أن $[d_1, d_2]$ تطبيق اشتقاق على A

أي $[d_1, d_2] \in Der(A)$

لنثبت صحة الشروط الخمسة:

(1) $[d,d] = dod - dod = 0$ ← التطبيق الصفري في المقاس $Der(A)$

حسب تعريف $[,]$

(2) $[d_1 + d_2, d_3] \overset{?}{=} [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$, $\forall d_1, d_2, d_3 \in Der(A)$

$\forall x \in A: [d_1 + d_2, d_3](x) = ((d_1 + d_2) o d_3)(x) - (d_3 o (d_1 + d_2))(x)$

التركيب توزيعي على الجمع من اليمين ومن اليسار

$= ((d_1 o d_3) + (d_2 o d_3))(x) - ((d_3 o d_1) + (d_3 o d_2))(x)$

$= (d_1 o d_3)(x) + (d_2 o d_3)(x) - (d_3 o d_1)(x) - (d_3 o d_2)(x)$

$= (d_1 o d_3)(x) - (d_3 o d_1)(x) + (d_2 o d_3)(x) - (d_3 o d_2)(x)$

حسب تعريف $= (d_1 o d_3 - d_3 o d_1)(x) + (d_2 o d_3 - d_3 o d_2)(x)$

$[,]$ $= [d_1, d_3](x) + [d_2, d_3](x)$

Alamal

(3) $[d_1, d_2+d_3] \overset{?}{=} [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$; $\forall d_1, d_2, d_3 \in Der(A)$

$\forall x \in A$: $[d_1, d_2+d_3](x) = (d_1 o (d_2+d_3))(x) - ((d_2+d_3) o d_1)(x)$

$= (d_1 o d_2 + d_1 o d_3)(x) - (d_2 o d_1 + d_3 o d_1)(x)$

$= (d_1 o d_2)(x) + (d_1 o d_3)(x) - (d_2 o d_1)(x) - (d_3 o d_1)(x)$

$= (d_1 o d_2 - d_2 o d_1)(x) + (d_1 o d_3 - d_3 o d_1)(x)$

$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_3](x)$

(4) $[\lambda d_1, d_2] \underset{(1)}{\overset{?}{=}} \lambda [d_1, d_2] \underset{(2)}{\overset{?}{=}} [d_1, \lambda d_2]$

$[\lambda d_1, d_2](x) = (\lambda d_1 o d_2)(x) - (d_2 o \lambda d_1)(x)$

$= (\lambda d_1)(d_2(x)) - d_2((\lambda d_1)(x))$

تلك d_1, d_2 $= \lambda \, d_1(d_2(x)) - d_2(\lambda \, d_1(x))$

$= \lambda \cdot (d_1 o d_2)(x) - \lambda \cdot (d_2 o d_1(x))$

$= \lambda \, (d_1 o d_2 (x) - d_2 o d_1(x))$

$= \lambda \, (d_1 o d_2 - d_2 o d_1)(x)$

$= \lambda \, [d_1, d_2](x)$

$[d_1, \lambda d_2](x) = (d_1 o \lambda d_2)(x) - (\lambda d_2 o d_1)(x)$

$= d_1((\lambda d_2)(x)) - (\lambda d_2)(d_1(x))$

$= d_1(\lambda \, d_2(x)) - \lambda \cdot d_2(d_1(x))$

$= \lambda \, d_1(d_2(x)) - \lambda \, d_2(d_1(x))$

$= \lambda (d_1(d_2(x)) - d_2(d_1(x)))$

$= \lambda (d_1 o d_2(x) - d_2 o d_1(x))$

$= \lambda (d_1 o d_2 - d_2 o d_1)(x)$

$= \lambda [d_1, d_2](x)$

Alamal

/ /

(5) $[d_1, [d_2, d_3]] + [d_2, [d_3, d_1]] + [d_3, [d_1, d_2]] \overset{?}{=} 0$

$\bullet\ [d_1, [d_2, d_3]] = [d_1, d_2 \circ d_3 - d_3 \circ d_2]$

$[,]$ تطبيق ثنائي الخطية $= [d_1, d_2 \circ d_3] - [d_1, d_3 \circ d_2]$

حسب تعريف $[,]$ $= d_1 \circ (d_2 \circ d_3) - (d_2 \circ d_3) \circ d_1 - d_1 \circ (d_3 \circ d_2) + (d_3 \circ d_2) \circ d_1$

$= d_1 \circ d_2 \circ d_3 - d_2 \circ d_3 \circ d_1 - d_1 \circ d_3 \circ d_2 + d_3 \circ d_2 \circ d_1$

$\bullet\ [d_2, [d_3, d_1]] = [d_2, d_3 \circ d_1 - d_1 \circ d_3]$

$= [d_2, d_3 \circ d_1] - [d_2, d_1 \circ d_3]$

$= d_2 \circ (d_3 \circ d_1) - (d_3 \circ d_1) \circ d_2$

$- d_2 \circ (d_1 \circ d_3) + (d_1 \circ d_3) \circ d_2$

$= d_2 \circ d_3 \circ d_1 - d_3 \circ d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1 \circ d_3 + d_1 \circ d_3 \circ d_2$

$\bullet\ [d_3, [d_1, d_2]] = [d_3, d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1]$

$= [d_3, d_1 \circ d_2] - [d_3, d_2 \circ d_1]$

$= d_3 \circ (d_1 \circ d_2) - (d_1 \circ d_2) \circ d_3 - d_3 \circ (d_2 \circ d_1) + (d_2 \circ d_1) \circ d_3$

$= d_3 \circ d_1 \circ d_2 - d_1 \circ d_2 \circ d_3 - d_3 \circ d_2 \circ d_1 + d_2 \circ d_1 \circ d_3$

$L_1 = \underline{d_1 \circ d_2 \circ d_3} - \underline{d_2 \circ d_3 \circ d_1} - \underline{d_1 \circ d_3 \circ d_2} + \underline{\underline{d_3 \circ d_2 \circ d_1}}$

$+ \underline{d_2 \circ d_3 \circ d_1} - \underline{\underline{d_3 \circ d_1 \circ d_2}} - \underline{\underline{d_2 \circ d_1 \circ d_3}} + \underline{d_1 \circ d_3 \circ d_2}$

$+ \underline{\underline{d_3 \circ d_1 \circ d_2}} - \underline{d_1 \circ d_2 \circ d_3} - \underline{\underline{d_3 \circ d_2 \circ d_1}} + \underline{\underline{d_2 \circ d_1 \circ d_3}}$

$= 0 = L_2$

مما سبق نجد أن $Der(A)$ جبر لي

Alamal

المحاضرة الرابعة

11 / 10 / 2017

نظرية:

ليكن A جبر لي، ولنكن x عنصراً من A

إن التطبيق $ad_x : A \to A$ adjoint حرافق

$$y \mapsto ad_x(y) = [x,y]$$

يكون تطبيق اشتقاق على A.

البرهان:

* نثبت أن التطبيق ad_x تشاكل:

• $ad_x(y+z) \stackrel{?}{=} ad_x(y) + ad_x(z)$

$$L_1 = ad_x(y+z) \stackrel{\text{حسب تعريف } ad_x}{=} [x, y+z]$$

$$\text{تطبيق ثنائي الخطية } [,] = [x,y] + [x,z]$$

$$\text{حسب تعريف } ad_x = ad_x(y) + ad_x(z)$$

$$= L_2$$

$\forall y, z \in A$

•• $ad_x(\alpha y) \stackrel{?}{=} \alpha\, ad_x(y)$ $\forall \alpha \in R$

$$L_1 = ad_x(\alpha y) \stackrel{\text{حسب تعريف } ad_x}{=} [x, \alpha y]$$

$$\text{تطبيق ثنائي الخطية } [,] = \alpha [x,y]$$

$$\text{حسب تعريف } ad_x = \alpha\, ad_x(y)$$

$$= L_2$$

وبالتالي ad_x تشاكل على A.

ويمكن دمج الشرطين السابقين كمايلي:

$$ad_x(\alpha y + \beta z) \stackrel{\text{من تعريف } ad_x}{=} [x, \alpha y + \beta z]$$ $\forall \alpha, \beta \in R$

$$= [x, \alpha y] + [x, \beta z]$$ $\forall y, z \in A$

$$\text{تطبيق ثنائي الخط } [,] \Leftarrow = \alpha [x,y] + \beta [x,z]$$

$$\text{حسب تعريف } ad_x = \alpha\, ad_x(y) + \beta\, ad_x(z)$$

Alamal

/ /

* نثبت أن التطبيق ad_x يحقق العلاقة:

$$ad_x[y,z] \overset{?}{=} [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

من تعريف ad_x

$$L_1 = ad_x(y,z) \overset{\uparrow}{=} [x,[y,z]]$$

من متطابقة جاكوبي $= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]]$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

(حسب نظرية) كون A جبر لي $= [y,[x,z]] + \underbrace{[z,[y,x]]}_{[[x,y],z]}$

$$= [y,[x,z]] + [[x,y],z]$$

$$= [y, ad_x(z)] + [ad_x(y), z]$$

مما سبق نجد أن التطبيق ad_x هو تطبيق اشتقاق على A

ملاحظة: نسمي كل تطبيق من النمط $ad_x : A \to A$ المعرف بالصيغة $ad_x(y) = [x,y]$ تطبيق الاشتقاق الداخلي على جبر لي A

* سنرمز من الآن وصاعداً لمجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على A بالرمز $Inn(A)$.

* يلاحظ مباشرة أن $Inn(A) \subseteq Der(A)$ بتعبير آخر كل تطبيق اشتقاق داخلي على A هو تطبيق اشتقاق على A إلا أن العكس غير صحيح

* نتحقق المساواة من أجل نمط خاص من جبر لي.

/ /

مبرهنة: لتكن A جبري على حلقة واحدية تبديلية R

إن التطبيق $\Psi : A \longrightarrow Der(A)$

$x \longmapsto \Psi(x) = ad_x$

والذي يقرن كل عنصر x من A بتطبيق الاشتقاق الداخلي ad_x

هو تشاكل بين جبريي لي A , $Der(A)$.

البرهان:

يجب إثبات ما يلي:

$\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$

$\Psi(\alpha x) = \alpha . \Psi(x)$

$\Psi[x,y] = [\Psi(x), \Psi(y)]$

$\forall x,y,z \in A \ , \forall \alpha \in R$

$ad_x : A \longrightarrow A$

$y \longmapsto ad_x(y) = [x,y]$

• $ad_{x+y} \overset{?}{=} ad_x + ad_y$

$\forall z \in A : L_1 = ad_{x+y}(z) \overset{\text{حسب تعريف } ad_x}{=} [x+y, z]$

تطبيق ثنائي خطي $[.] \quad = [x,z] + [y,z]$

حسب تعريف $ad_x \quad = ad_x(z) + ad_y(z)$

$= (ad_x + ad_y)(z)$

$= L_2 \quad \Rightarrow \Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$

•• $ad_{\alpha x} \overset{?}{=} \alpha \, ad_x$

$\forall z \in A : L_1 = ad_{\alpha x}(z) \overset{\text{تعريف } ad_x}{=} [\alpha x, z] \overset{\text{خطي } [,]}{=} \alpha [x,z]$

$= \alpha \, ad_x(z)$

$= (\alpha \, ad_x)(z) \quad = L_2$

$\Rightarrow \Psi(\alpha x) = \alpha \Psi(x)$

/ /

... $ad_{[x,y]} \stackrel{?}{=} [ad_x, ad_y] = ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x$

حسب تعريف ad_x

$L_1 = ad_{[x,y]}(z) \stackrel{\uparrow}{=} [[x,y], z] = -[z,[x,y]]$

متطابقة جاكوبي $= [x,[y,z]] + [y,[z,x]]$

مبرهنة (كون A جبري) $= [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$

من تعريف ad_x $= [x, ad_y(z)] - [y, ad_x(z)]$

من تعريف ad_x $= ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z))$

$= (ad_x \circ ad_y)(z) - (ad_y \circ ad_x)(z)$

من تعريف $[,]$ $= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z)$

$= [ad_x, ad_y](z)$

$= L_2$

نتيجة: ليكن A جبري، عندئذ:

تشاكل تشاكل

$\forall x \in A, \forall d \in Der(A) : [d, ad_x] = ad_{dx}$

تطبيق مشتقة / تطبيق مشتقة / تطبيق مشتقة

البرهان:

$\forall z \in A$:

$[d, ad_x](z) = (d \circ ad_x - ad_x \circ d)(z)$

$= (d \circ ad_x)(z) - (ad_x \circ d)(z)$

$= d(ad_x(z)) - ad_x(d(z))$

من تعريف ad_x $= d[x,z] - [x, d(z)]$

d تطبيق مشتقة $= [dx, z] + [x, dz] - [x, dz]$

$= [dx, z]$

$= ad_{dx}(z)$

وهو المطلوب.

Alamal

جبور لي الجزئية والمثاليات في جبر لي:

تعاريف أساسية:

← ليكن A جبر لي. نقول المجموعة الجزئية S من جبر لي A إنها جبر لي جزئي من A إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

. S فضاء جزئي من A

. $[S,S] \subseteq S$

بتعبير مكافئ: $\alpha x + \beta y \in S \quad ; \forall x,y \in S, \forall \alpha, \beta \in R$.

$[x,y] \in S \quad ; \forall x,y \in S$ ..

← يقال عن المجموعة الجزئية J من A إنها مثالي في A إذا وفقط إذا كان:

. J فضاء جزئي من A $\Leftrightarrow$ $\alpha x + \beta y \in J; \forall x,y \in J, \alpha, \beta \in R$.

.. $[A,J] \subseteq J$ $\quad$ $[x,y] \in J; \forall x \in A, \forall y \in J$ ..

توضيح:

$$[A,J] \subseteq J \Leftrightarrow [x,y] \in J, \forall x \in A, \forall y \in J$$
$$\Leftrightarrow ad_x(y) \in J, \forall y \in J, \forall x \in A$$
$$\Leftrightarrow ad_x(J) \subseteq J, \forall x \in A$$

ملاحظة: يتضح مما سبق أن كل جبر لي جزئي من جبر لي A ← مثالي هو

ولكن العكس غير صحيح

(ليكن A جبر لي، يقال عن جزء I من A إنه مثالي في A إذا كان فضاءً جزئياً من A وكان مستقراً بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A أي $ad_x(I) \subseteq I$ وذلك مهما يكن x من A)

/ /

← يقال عن المجموعة الجزئية I من جبر لي A إنها مثالي مميز في A إذا وفقط إذا تحقق:

- I مقاس جزئي من A
- I مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A، أي

$$d(I) \subseteq I \; ; \; d \in Der(A)$$

ملاحظة: يتضح مما سبق أن كل مثالي مميز هو مثالي إلا أن العكس غير صحيح

ملاحظة هامة: إن الشرط الثاني في تعريف المثالي يعني أن I مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلي على A
(كل مثالي مميز هو مثالي لأن كل تطبيق اشتقاق داخلي هو تطبيق اشتقاق)

نظرية:
إن تقاطع مثاليين في جبر لي A يكون مثالياً في A

البرهان:
ليكن I و J مثاليين في جبر لي A ولنبرهن أن $I \cap J$ مثالي في A

① إن تقاطع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A
$I \cap J$ مقاس جزئي من A (كمقاس)

② لنبرهن أن $ad_x (I \cap J) \subset I \cap J \;\;, \forall x \in A$

نعلم أن تقاطع مقاسين جزئيين من المقاس A هو مقاس جزئي من A
ليكن $z \in I \cap J$ ولنبرهن أن $ad_x (z) \subset I \cap J$
في الواقع $z \in J \;,\; z \in I$ وكلاً من I و J مثالي في A
هذا يعني

$$ad_x (z) \in I \;\;,\;\; ad_x (z) \in J$$

(كون I و J مثالي)

$$\Rightarrow ad_x (z) \in I \cap J$$

وبالتالي $I \cap J$ هو مثالي في A

نظرية:
إن مجموع مثاليين في جبر لي A يكون مثالياً في A

البرهان:
ليكن I, J مثاليين في جبر لي A، ولنبرهن أن $I + J$ مثالي في A

① إن مجموع مقاسين جزئيين من مقاس A يكون مقاساً جزئياً من A

. $I + J$ مقاس جزئي من A

② لإتمام المطلوب يجب أن نبرهن: $ad_x(I + J) \subseteq I + J \; ; \forall x \in A$

ليكن $y \in I + J$ إذاً $y = a + b$ حيث $a \in I, b \in J$

ومنه $ad_x(b) \in J$, $ad_x(a) \in I$ وذلك لأن I, J مثاليين في A

يتضح ما يلي:

$$ad_x(y) = ad_x(a + b) = ad_x(a) + ad_x(b) \in I + J$$

خطية ad تراكل

ومنه $I + J$ مثالي في A

16 / 10 / 2017

المحاضرة الخامسة

تذكير:

* لتكن A جبر لي و S مجموعة جزئية من هذا الجبر

S مثالي في A ⟺ S مقاس جزئي من المقاس A

∴ S مستقرة بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A ، بتعبير آخر:

$ad_x (S) \subset S \; ; \forall x \in A \Leftrightarrow ad_x (s) \in S \; ; \forall x \in A, \forall s \in S$

$\Leftrightarrow [x, s] \in S \; ; \forall x \in A, \forall s \in S$

* لتكن J مجموعة جزئية من A ، J جبر جزئي من A ⟺ J مقاس جزئي

∴ $[J, J] \subset J$

$\Updownarrow$

$[x, y] \in J \; ; \forall x, y \in J$

اصطلاح:

إذا كان I و J مقاسان جزئيان في جبر لي A فنسترمز ب $[I, J]$ للمقاس الجزئي من A المولد بعناصر من النمط $[x, y]$ حيث $x \in I, y \in J$

* وينتج مباشرة أن $[I, J] = [J, I]$

نظرية: إذا كان I , J ~~مثاليين~~ مثاليين في جبر لي A فإن $[I, J]$ مثالي في A.

البرهان:

وفقاً للاصطلاح السابق $[I, J]$ مقاس جزئي من A

لإتمام المطلوب يكفي أن نبرهن أن هذا المقاس الجزئي مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A

أي سنبرهن أن: $ad_x [I, J] \subseteq [I, J] \; ; \forall x \in A$

$\forall y \in I, \forall z \in J: \quad ad_x [y, z] = [x, [y, z]]$

من تعريف تطبيق الاشتقاق الداخلي

$= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]]$ حسب مطابقة جاكوبي

$= [y, [x, z]] + [[x, y], z]$

$= [y, ad_x(z)] + [ad_x(y), z]$ حسب تعريف ad_x

$= [\underbrace{ad_x(y)}_{\in I}, \underset{\in J}{z}] + [\underset{\in I}{y}, \underbrace{ad_x(z)}_{\in J}] \in [I, J]$

I مثالي فهو مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلي و J مثالي فهو مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلي

$\in [I, J]$

$\Rightarrow ad_x [y, z] \subseteq [I, J]$

ملاحظة: $[I, J] = [J, I]$

تتيجة: إذا كان I و J مثاليين مميزين في جبر لي A عندئذ $[I, J]$ مثالي مميز في A

البرهان:

وفقاً للاصطلاح السابق إن $[I, J]$ مقاس جزئي من A

لإتمام المطلوب يكفي أن نبرهن أن $[I, J]$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A، بتعبير آخر لنبرهن أن:

$\forall d \in Der(A): \quad d [I, J] \subseteq [I, J]$

$\forall y \in I, z \in J: \quad d [y, z] \overset{\text{d تطبيق اشتقاق}}{=} [\underset{\in I}{dy}, \underset{\in J}{z}] + [\underset{\in I}{y}, \underset{\in J}{dz}]$

$\in [I, J] \qquad \in [I, J]$

I و J مثالي مميز في A فهو مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A

$\Rightarrow d [y, z] \in [I, J]$

يتضح من ذلك أن $[I, J]$ مثالي مميز في A

2

Alamal

* نظرية:

لتكن A جبر لي، إن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على A $Inn(A)$ تكون مثالياً في جبر لي $Der(A)$

$$[\underbrace{Inn(A)}_{\text{مثالي}} \subset \underbrace{Der(A)}_{\text{جبر لي}}]$$

البرهان:

* لنبرهن أولاً أن $Inn(A)$ مقاس جبري من جبر لي $Der(A)$

• إن $Inn(A) \neq \phi$ لأن $ad_0 \in Inn(A)$

(لأن الصفر ينتمي لـ A كون A جبر لي)

من جهة أخرى لنبرهن أن:

• $\forall x, y \in A \quad , \alpha, \beta \in R : \alpha ad_x + \beta ad_y \in Inn(A)$

تطبيقات اشتقاق داخلية ← فهي تداكلات

سنبرهن أن:

$$\alpha ad_x + \beta ad_y = ad_{\alpha x+\beta y}$$

$x \in A, y \in A$, A جبر لي

فهو مقاس وبالتالي

$\alpha x + \beta y \in A$

فإذا برهنا التساوي بين التداكلين يتم المطلوب

$$(\alpha ad_x + \beta ad_y)(z) = \alpha ad_x(z) + \beta ad_y(z)$$

$$= [\alpha x, z] + [\beta y, z]$$

$$= [\alpha x + \beta y, z]$$

$$= ad_{\alpha x+\beta y}(z) \in Inn(A)$$

يتضح من ذلك صحة المساواة

وبما أن الطرف الأيمن ينتمي لـ $Inn(A)$ هذا يؤدي إلى أن الطرف الأيسر سيكون كذلك

$\Leftarrow$ $Inn(A)$ مقاس جزئي من $Der(A)$

* لنبرهن الآن أن: $[Der(A), Inn(A)] \subset Inn(A)$

~~[illegible]~~

ليكن $x \in A$, $d \in Der(A)$

لنبرهن أن: $[d, ad_x] = ad_{dx} \in Inn(A)$

$x \in A$ و $dx \in A$ كون d تشاكل

$\forall z \in A$:

$$
\begin{aligned}
[d, ad_x](z) &= (d \circ ad_x - ad_x \circ d)(z) \\
&= d(ad_x(z)) - ad_x(d(z)) \\
&= d[x, z] - [x, dz] \\
&= [dx, z] + [x, dz] - [x, dz] \\
&= [dx, z] \\
&= ad_{dx}(z)
\end{aligned}
$$

ولكن $ad_{dx} \in Inn(A)$

وبالتالي $[d, ad_x] \in Inn(A)$

مما سبق نستنتج أن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية على جبر لي A $Inn(A)$ تكون مثالية في مجموعة تطبيقات الاشتقاق على A $Der(A)$

مبرهنة: $f: A \to A'$

إذا كان f تشاكلاً لجبر لي A في جبر لي A' فإن $\ker f$ مثالي في ...

البرهان:

* لنبرهن أن $\ker f$ فضاء جزئي في A وذلك كما يلي:

$\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall x, y \in \ker f$ $\quad \alpha x + \beta y \overset{?}{\in} \ker f$

$$f(\alpha x + \beta y) \overset{f \text{ تشاكل}}{=} \alpha \underbrace{f(x)}_{=0} + \beta \underbrace{f(y)}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$$

$x, y \in \ker f$ $\quad \Leftarrow \ker f$ فضاء جزئي من A

/ /

* لنبرهن أن $ker f$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A
أي لنبرهن: $[A, ker f] \subset ker f$

$\forall x \in A \; , \; \forall y \in ker f \overset{??}{\Rightarrow} [x,y] \in ker f$

$f[x,y] \overset{f \text{ تشاكل}}{=} [f(x), f(y)] \overset{y \in ker f}{=} [f(x), 0] = 0$

لأن:

$x \in A \Rightarrow f(x) \in A'$

$y \in ker f \Rightarrow f(y) = 0$

$[a, 0] = [a, b-b] = [a,b] - [a,b] = 0$

$\Rightarrow [x,y] \in ker f$

مما سبق نجد أن $ker f$ مثالي في A.

☆ نظرية:

إذا كان f تشاكل بين جبري لي A, A' $f: A \to A'$

فإن $Im f$ جبر لي جزئي في A'

البرهان: مقاس + مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية

* لنبرهن أن $Im f$ مقاس جزئي من A':

إن $Im f \neq \phi$ لأن $0 \in A \; , \; f(0) = 0 \in A'$

$\forall x', y' \in Im f \; , \; \forall \alpha, \beta \in R \overset{??}{\Rightarrow} \alpha x' + \beta y' \in Im f$.

$x' \in Im f \Rightarrow \exists x \in A ; f(x) = x'$

$y' \in Im f \Rightarrow \exists y \in A ; f(y) = y'$

$$\Rightarrow \alpha x' + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
$$\overset{\text{تشاكل } f}{=} f(\alpha x + \beta y) \in Im f$$

$$\Rightarrow \alpha x' + \beta y' \in Im f$$

إذاً $Im f$ مقاس جزئي من A'.

* لنبرهن أن $[Im f, Im f] \subset Im f$ أي $\forall x', y' \in Im f : [x', y'] \in Im f$

$x' \in Im f \Rightarrow \exists x \in A \; ; \; f(x) = x'$
$y' \in Im f \Rightarrow \exists y \in A \; ; \; f(y) = y'$

$$\Rightarrow [x', y'] = [f(x), f(y)] \overset{\text{تشاكل } f}{=} f[x, y]$$

وبما أن $x, y \in A$ فإن $[x, y] \in A$

$$\Rightarrow f[x, y] \in Im f \Rightarrow [x', y'] \in Im f$$

* إذاً $Im f$ جبر جزئي في A'

تعريف:

← لتكن A جبري على الحلقة الواحدية التبادلية R ولتكن I مثالي في A لنعرف على A العلاقة الثنائية $(\equiv)$ بالشكل التالي:

$$x \equiv y \bmod (I) \Leftrightarrow x - y \in I \; ; \; \forall x, y \in A$$

إن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ

Alamal

/ /

$x,y,z \in A$ * لنبرهن أن العلاقة ($\equiv$) هي علاقة تكافؤ

(1) العلاقة ($\equiv$) انعكاسية:

$$\forall a \in A : a \equiv a \bmod (I) \Leftrightarrow a - a = 0 \in I$$

(2) العلاقة ($\equiv$) تناظرية:

$$a \equiv b \bmod (I) \Leftrightarrow a - b \in I \underset{\text{مثالي } I}{\Leftrightarrow} -(a-b) \in I$$

$$\Leftrightarrow b - a \in I \Leftrightarrow b \equiv a \bmod (I)$$

(3) العلاقة ($\equiv$) متعدية:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y \bmod (I) \\ y \equiv z \bmod (I) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - y \in I \\ y - z \in I \end{array}$$

$$x - z = x - y + y - z = \underbrace{(x-y)}_{\in I} + \underbrace{(y-z)}_{\in I} \in I$$

$$\Rightarrow x \equiv z \bmod (I) \Leftrightarrow (x - z) \in I$$

مما سبق نجد أن ($\equiv$) علاقة تكافؤ على A

* لنبرهن أن العلاقة ($\equiv$) متوافقة مع البنية A (أدلرنا معرفة جيداً)
(متوافقة أي متسجمة مع قوانين التشكيل)

$$\begin{array}{l} \forall x, y, x', y' \in A \,;\, \lambda \in R \end{array} \left.\begin{array}{l} x \equiv x' \bmod I \quad (x - x' \in I) \\ y \equiv y' \bmod I \quad (y - y' \in I) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $(x+y) \equiv (x'+y') \bmod I$ $\quad (x+y) - (x'+y') \in I$
- $\lambda x \equiv (\lambda x') \bmod I$ $\quad \lambda x - \lambda x' \in I$
- $[x,y] \equiv [x',y'] \bmod I$ $\quad [x,y] - [x',y'] \in I$

Alamal

$\cdot\ \forall x, y, x', y' \in A\ ;\quad x \equiv x' \bmod I \iff (x - x') \in I$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ y \equiv y' \bmod I \iff (y - y') \in I$

$\iff (x - x') + (y - y') \in I \iff (x + y) - (x' + y') \in I$

$\iff (x + y) \equiv (x' + y') \bmod I$

$\cdot\cdot\ \forall x, x' \in A\ ,\ \forall \lambda \in R;\quad x \equiv x' \bmod I \iff (x - x') \in I$

I مثالي في A فهو جبر متماسك ج

على A $\iff \lambda(x - x') \in I \iff \lambda x - \lambda x' \in I$

$\iff \lambda x \equiv (\lambda x') \bmod I$

$\cdot\cdot\cdot\ \forall x, x', y, y' \in A\ ;\quad x \equiv x' \bmod I \iff x - x' \in I$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \equiv y' \bmod I \iff y - y' \in I$

علاقة I مثالي فتركيب عنصر في المثالي I مع عنصر من A ينتمي لـ I

$\Rightarrow [y, x - x'] \in I\ ,\quad [x', y - y'] \in I$

I مثالي

$\Rightarrow \cancel{By, x - x}\ [x', y - y'] - [y, x - x'] \in I$

[,] ثنائي الخطية

$\Rightarrow [x', y] - [x', y'] - \underbrace{[y, x]}_{-[x, y]} + \underbrace{[y, x']}_{-[x', y]} \in I$

$\Rightarrow [x, y] - [x', y'] \in I$

$\iff [x, y] \equiv [x', y'] \bmod I$

/ /

مما سبق نجد أن العلاقة المذكورة متوافقة مع بنية A

* أصبح لدينا A جبري مزود بعلاقة تكافؤ معرفة جيداً عليه وبالتالي نحصل على مجموعة صفوف تكافؤ أي نحصل على المجموعة

$$A/_I = \{x+I \,;\, x \in A\}$$

* إن $A/_I$ تشكل مقاساً على R ، يدعى مقاس الخارج

نعرف على هذه المجموعة قانوني تشكيل كما يلي:

الداخلي:

$$+ : A/_I \times A/_I \longrightarrow A/_I$$

$$(x+I, y+I) \longmapsto (x+I)+(y+I) = \underset{A}{(x+y)} + I$$

الخارجي:

$$\cdot : R \times A/_I \longrightarrow A/_I$$

$$(\lambda, x+I) \longmapsto \lambda.(x+I) = \lambda.x + I$$

قانون التشكيل الخارجي لـ A ... قانون التشكيل الخارجي لـ $A/_I$

لنبرهن الشروط الخمسة الواردة في تعريف المقاس (المودول).

(1) إن $(A/_I, +)$ زمرة تبديلية: لأن $(A,+)$ ز.ت كون A جبري

• قانون التشكيل (+) المعرف على $A/_I$ داخلي وذلك حسب التعريف

$$\forall\, x+I, y+I \in A/_I : (x+I)+(y+I) = \underbrace{(x+y)}_{A \ni} + I \in A/_I$$

•• العنصر الحيادي بالنسبة للجمع موجود: $0_A + I \in A/_I$

كون $0_A \in A$ كون A جبري فهو مقاس وبالتالي $(A,+)$ زمرة تبديلية

فهي تملك حيادي بالنسبة للجمع وهو 0_A

$$\forall\, x+I \in A/_I : (0+I)+(x+I) = (0+x)+I = (x+0)+I$$

$$= x+I \qquad \text{ز.ت } (A,+)$$

Alamal

$x \in A$

...لكل عنصر من A/I نظير جمعي

$\forall x+I \in A/I \; : \; \exists \; x \in A \; ; \; x+I \in A/I$

ز.ت $(A,+)$

وجمعه

$(x+I)+(x+I) = (x+x)+I$

حسب تعريف $(+)$

ز.ت $(A,+)$ $= (x-x)+I$

$= 0+I$

...قانون التشكيل الداخلي $(+)$ المعرف على A/I تبديلي:

$\forall x+I, y+I \in A/I \; ; \; x,y \in A$

$(x+I)+(y+I) = (x+y)+I = (y+x)+I = (y+I)+(x+I)$

من تعريف $(+)$ ، ز.ت $(A,+)$ ، من تعريف $(+)$

...$(+)$ تجميعي:

$\forall x,y,z \in A \; , \; x+I, y+I, z+I \in A/I$

$((x+I)+(y+I))+(z+I) = ((x+y)+I)+(z+I)$

من تعريف $(+)$ ، $\ni A$ ، $\ni A$

من تعريف $= ((x+y)+z)+I = (x+(y+z))+I$

تجميعي $(+)$ ، ز.ت $(A,+)$

$= (x+I)+((y+z)+I)$

$= (x+I)+((y+I)+(z+I))$

مما سبق نجد أن $(A/I,+)$ $\boxed{\text{زمرة تبديلية}}$

/ /

(2) $1_R \cdot (x+I) \overset{??}{=} x+I$ $\forall x \in A,\ x+I \in A/I$ (2)

$1_R \cdot x = x$

$1_R \cdot (x+I) = 1_R \cdot x + I \underset{\downarrow}{=} x+I$

كون A جبري فضاء متجهات على R ضرب خارجي على A

ضرب خارجي على A/I

(3) $(\alpha+\beta)(x+I) \overset{??}{=} \alpha(x+I)+\beta(x+I)$; $\forall \alpha,\beta \in R$ (3)

$\forall x \in A,\ x+I \in A/I$

$(\alpha+\beta).(x+I) = (\overbrace{\alpha+\beta}^{\in R}).\overset{\in A}{\tilde{x}} + I$

من تعريف (.) على A/I

مقاس على R A $= (\alpha x+\beta y) + I$

من تعريف (+) على A/I $= (\alpha x+I) + (\beta y+I)$

من تعريف (.) على A/I $= \alpha(x+I) + \beta(x+I)$

(4) $\alpha((x+I)+(y+I)) \overset{??}{=} \alpha(x+I)+\alpha(y+I)$ (4)

من تعريف (+) على A/I

$\alpha((x+I)+(y+I)) \overset{\uparrow}{=} \alpha((x+y)+I)$

من تعريف (.) على A/I $= \overset{\in R}{\alpha}(\overset{\in A}{x+y}) + I$

كون A مقاس $= (\alpha x+\alpha y) + I$

من تعريف (+) على A/I $= (\alpha x+I)+(\alpha y+I)$

من تعريف (.) على A/I $= \alpha(x+I)+\alpha(y+I)$

(5) $(\alpha\beta)(x+I) \overset{??}{=} \alpha(\beta(x+I))$ (5)

R A/I

$(\alpha\beta)(x+I) = (\alpha\beta)x + I = \alpha(\beta x) + I = \alpha(\beta x+I)$

من تعريف (.) على A/I ، A مقاس ، من تعريف (.) على A/I

من تعريف (.) على A/I $= \alpha(\beta(x+I))$

ما سبق نخبر أن $A/_I$ تشكل $\boxed{\text{فقاساً}}$ على الحلقة R

نظرية: إن $A/_I$ هو جبر لي:

* لنعرف على $A/_I$ قانون تشكيل داخلي بالشكل:

$$[\,,\,] : A/_I \times A/_I \longrightarrow A/_I$$

$$(x+I,\ y+I) \longmapsto [x+I,\ y+I] = [x,y]+I$$

لنتحقق من صحة الشروط الخمسة الواردة في تعريف جبر لي:

(1) $[x+I,\ x+I] = [x,x]+I = 0+I = I$

حسب تعريف $[\,,\,]$ — $x \in A$ و A جبر لي

(2) $[(x+I)+(y+I),\ z+I] \overset{(+)}{=} [(x+y)+I,\ z+I]$

$\boxed{I+I=I}$

من تعريف $[\,,\,]$ $= [\underset{\in A}{x+y},\ z]+I$

ثنائي الخطية على $[\,,\,]$ $= ([\underset{A\ni}{x},z]+[\underset{A\ni}{y},z])+I$

من تعريف $(+)$ $= ([x,z]+I)+([y,z]+I)$

من تعريف $[\,,\,]$ $= [x+I,z+I]+[y+I,z+I]$

(3) $[x+I,\ (y+I)+(z+I)] \overset{(+)}{=} [x+I,\ (y+z)+I]$

من تعريف $[\,,\,]$ $= [x,(y+z)]+I$

ثنائي الخطية في A $[\,,\,] = ([x,y]+[x,z])+I$

من تعريف $(+)$ على $A/_I$ $= ([x,y]+I)+([x,z]+I)$

من تعريف $[\,,\,]$ في على $A/_I$ $= [x+I,y+I]+[x+I,z+I]$

Alamal

$\forall \lambda \in R$

(4) $[\lambda.(x+I), y+I] \overset{(\cdot)}{=} [\lambda x + I, y+I]$

$A/_I$ على $[,]$ حسب تعريف $= [\lambda x, y] + I$

خطية $[,]$ بتلك جبر لي A $= \lambda [x, y] + I$

$A/_I$ على $(\cdot)$ من تعريف $= \lambda ([x, y] + I)$

$A/_I$ على $[,]$ من تعريف $= \lambda ([x+I, y+I])$

$[x+I, \lambda(y+I)] \overset{??}{=} \lambda [x+I, y+I]$

$[x+I, \lambda(y+I)] \overset{A/_I \text{ على } (\cdot)}{=} [x+I, \lambda y+I]$

$A/_I$ على $[,]$ $= [x, \lambda y] + I$

$[,]$ جبر لي A $= \lambda [x, y] + I$
خطية $[,]$

$A/_I$ على $(\cdot)$ $= \lambda ([x, y] + I)$

$A/_I$ على $[,]$ $= \lambda ([x+I, y+I])$

(5) $[x+I, [y+I, z+I]] + [y+I, [z+I, x+I]]$

$+ [z+I, [x+I, y+I]] = 0 + I$

/ /

$$L_1 = [x+I,\ [y,z]+I] + [y+I,\ [z,x]+I]$$

من تعريف [,]

$$+ [z+I,\ [x,y]+I]$$

$$= ([x,[y,z]]+I) + ([y,[z,x]]+I) + ([z,[x,y]]+I)$$

$$= \underbrace{[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]}_{=0} + I$$

لأن A جبرلي , $x,y,z \in A$ فمطابقة جاكوبي محققة

$$= 0 + I = I = L_2$$

فمطابقة جاكوبي محققة في $A/_I$

ما سبق نجد أن $A/_I$ جبرلي .

ملاحظة ٣ : في الامتحان إذا طلب إثبات أن $A/_I$ جبرلي نبدأ بتعريف المجموعة $A/_I$ و نزودها بقوانين التشكيل ونبرهن أنها مقاس ثم نبرهن أنها جبرلي أما إذا طلب برهن أن المقاس $A/_I$ هو جبرلي فالبرهان هو النظرية السابقة. (من اللازم أن $A/_I$ جبرلي أثبت فقط بمطابقة جاكوبي)

ملاحظة: إن $A/_I$ جبرلي المذكور في النظرية السابقة يسمى جبرلي الخا
وبالتالي نحصل وفقاً لهذه النظرية على جبرلي الخارج $er(A) / Inn(A)$
والذي ندعوه الاشتقاق الخارجي على جبرلي A

موجودة في الكتب ثم تذكر في المحاضرة

١٦

Alamal

/ /

مبرهنات التماثل في جبور لي : (تقبل دون برهان)

مبرهنة التماثل الأولى :

إذا كان $f: A \to A'$ تشاكلاً لجبري لي A, A' فإن $A/_{\ker f} \cong Im f$

$A/_{\ker f} \cong Im f$

مبرهنة التماثل الثانية :

إذا كان $f: A \to A'$ تشاكلاً لجبري لي A و A' و I, J مثاليين في A حيث $I \subseteq J$ عندئذ $J/_I$ مثالياً في جبر لي $A/_I$

زد على ذلك :

$$\frac{A/_I}{J/_I} \cong A/_J$$

مبرهنة التماثل الثالثة :

إذا كان I, J مثاليين في جبر لي A على الحلقة الواحدية التبديلية R فإن :

$$\underbrace{\frac{I+J}{I}}_{\text{جبر خارج}} \cong \underbrace{\frac{J}{I \cap J}}_{\text{جبر خارج}}$$

$I \subseteq I+J$ مثالي في $I+J$
$I \cap J \subseteq J$ مثالي في J

كل مثالي هو جبر جزئي (العكس غير صحيح)

(جبر لي) إذاً يمكن بناء جبر لي الخارج

المحاضرة السادسة

18/10/2017

جبورلي القابلة للحل وجبورلي نصف البسيطة

أولاً: جبورلي القابلة للحل:

مقدمة: ليكن A جبرلي على حلقة واحدية تبادلية R نعلم أن كل جبرلي هو مثالي مميز
إذاً $[A,A]$ هو مثالي مميز في A

(حسب نظرية: إذا كان I, J مثاليين مميزين في جبرلي A فإن $[I,J]$ مثالي مميز في A)

وبالتالي يمكن لنا تشكيل المتتالية التالية:

$$\left.\begin{aligned} D^0A &= A \\ D^1A &= [A,A] \\ D^2A &= [D^1A, D^1A] \\ &\vdots \\ D^nA &= [D^{n-1}A, D^{n-1}A] \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

متتالية من المثاليات المميزة في جبرلي A

هذه المتتالية تحقق ما يلي:

$$A = D^0A \supseteq D^1A \supseteq D^2A \supseteq \dots \supseteq D^nA \supseteq \dots$$

(متتالية متناقصة)

$*\ D^{i+1}A \subseteq D^iA;\ \forall i \geq 0$

لأن: $D^{i+1} = [D^iA, D^iA]$ مثالي مميز في A فهو مثالي في A إذاً $D^{i+1}A \subseteq D^iA$

لأن كل مثالي في A هو جبر جزئي

* ندعو هذه المتتالية المتناقصة من المثاليات المميزة في A بالمتسلسلة المشتقة في A

لأن D^iA مثالي في $D^{i-1}A$ $(\forall i=1,\dots,n)$ في الواقع لدينا $\dots A, D^iA] \subseteq [A, D^iA] \subseteq D^iA$

وكذلك لأن D^iA مثالي في A $(\forall i=1,\dots,n)$ وبالاستفادة أخيراً من كون D^iA و A

جبوراً جزئية من A ومن كون $D^iA \subseteq D^{i-1}A$ يتضح أن D^iA مثالي في $D^{i-1}A$

ومنه الحالة هذه المتسلسلة أن: $A = D^0A \supseteq D^1A \supseteq D^2A \supseteq \dots \supseteq D^{i-1}A \supseteq D^iA \dots$

Alamal

/ /

← تعريف: يقال عن جبر لي A إنه قابل للحل إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $D^m A = \{0\}$

← ندعو أصغر عدد صحيح موجب يحقق هذه المساواة بدليل قابلية الحل (ليس بالضرورة أن يكون m المذكور في التعريف هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق المساواة)

ملاحظة: إن المتتالية المذكورة سابقاً تدعى المتسلسلة المشتقة في جبر لي A

← تعريف: يقال عن المثالي J في جبر لي A إنه قابل للحل إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $D^m J = \{0\}$

وبنفس الأسلوب نعرف مفهوم دليل قابلية الحل لـ J.

← ندعو أكبر مثالي قابل للحل في جبر لي A بأساس A ونرمز له $Rad\, A$ (من حيث مفهوم الاحتواء)

($Rad\, A$ لماذا يكون ... لـ A) ؟

نظرية:

كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابلاً للحل.

البرهان:

ليكن A جبر لي قابل للحل ولنفرض أن H جبر جزئي من A القابل للحل

عا أن A قابل للحل نفرض أن دليله n أي $D^n A = \{0\}$

سنبرهن أن $D^r H \subset D^r A$ وذلك مهما يكن $r \geq 0$

بالاستقراء الرياضي.

• من أجل $r=0$ لدينا $H \subseteq A$ فالقضية محققة وضوحاً

.. ومن أجل $r=1$ أيضاً محققة لأن $D^1 H = [H,H] \subseteq [A,A] = D^1 A$

... نفرض أنها صحيحة من أجل r ولنبرهن صحتها من أجل $r+1$

$$D^{r+1} H = [D^r H, D^r H] \subseteq [D^r A, D^r A] = D^{r+1} A$$

حسب مبدأ الاستقراء $\Rightarrow D^{r+1} H \subseteq D^{r+1} A$

Alamal

/ /

القضية صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب فهي صحيحة من أجل $r = n$

أي:

H جبر جزئي قابل للحل $\Leftarrow$ $D^n H \subseteq D^n A = \{0\}$

※ إن خاصية قابلية الحل لجبور لي وراثية.

نظرية:

ليكن f تشاكل بين جبر لي A القابل للحل وجبر لي A'

$f: A \to A'$ عندئذ يكون $f(A)$ قابل للحل. بتعبير آخر:

إن الصورة المباشرة لجبر لي قابل للحل وفق أي تشاكل يكون قابلاً للحل.

كل شيء نحتاج عليه في البرهان قبل هذه النظرية يجب أن نذكر

البرهان:

لنفرض أن A جبر لي قابل للحل ودليله n عندئذ $D^n A = \{0\}$

نعلم مسبقاً إن الصورة المباشرة لجبر لي وفق تشاكل هو جبر لي $\boxed{??}$

وهذا يعني أن $f(A)$ جبر لي (وهذا يعني أن $f(A)$ جبر جزئي من جبر لي

من أجل الوصول إلى الهدف يجب أن نبرهن بالاستقراء الرياضي ما يلي:

الطالب الهرماني يبرر بين r و n إذا برهنا القضية من أجل أي r صحيحة من أجل n

$$f(D^r A) \overset{(*)}{=} D^r(f(A)) \quad , \forall r \geq 0$$

إذا برهنا صحة (*) من أجل $\forall r \geq 0$ فهي صحيحة من أجل n وهذا يعني أن الصورة المباشرة الصفر وفق تشاكل هي الصفر إذاً $f(A)$ قابل للحل ولكن ليس بالضرورة أن يكون n هو الدليل

من أجل $r = 1$ لدينا:

$$f(D^1 A) = f[A, A] = [f(A), f(A)] = D^1(f(A))$$

كون f تشاكل

فالقضية صحيحة من أجل $r = 1$

نفرض أنها صحيحة من أجل r و

نبرهن صحتها من أجل $r + 1$

Alamal

/ /

$$f(D^{r+1}A) = f[D^rA, D^rA] \underset{\text{تشاكل } f}{=} [f(D^rA), f(D^rA)]$$

$$= [D^r(f(A)), D^r(f(A))]$$ حسب الفرض الاستقرائي

$$= D^{r+1}(f(A))$$

تم إثبات القضية (*) وعلماً أنها صحيحة من أجل r فإنها صحيحة من أجل ذلك العدد الصحيح الموجب n.

$$\Rightarrow f(D^nA) = D^n(f(A))$$

$\Updownarrow$ A قابل الحل

$$\Rightarrow f(\{0\}) = D^n(f(A)) = \{0\}$$

إذاً $f(A)$ قابل للحل (الصورة المباشرة لجبر لي قابل للحل وفق تشاكل يكون جبر لي قابلاً للحل.)

نتيجة:

كل جبر لي تبادلي يكون قابل للحل ودليله الواحد.

الإثبات:

إذا كان A جبر لي تبادلي عندئذ $[A,A]=\{0\} \Rightarrow D^1A=\{0\}$

إذاً A قابل للحل ودليله $= 1$

★ **مبرهنة:**

ليكن A جبر لي قابل للحل ولنفرض إن I مثالي في A عندئذ A/I قابل للحل

البرهان:

نعلم أن: A/I جبر لي ولنبرهن أنه قابل للحل.

حيث خارج جبر لي يكون جبر لي

وأثبتنا القضية (*): $f(D^nA) = D^n(f(A)), \forall n \in \mathbb{Z}^+$

في الامتحان يمكن أن نثبت القضية (*) ضمن البرهان لأنه في الحقيقة اثبات (*) تم في سياق اثبات هذه المبرهنة

حيث f تشاكل من جبري قابل للحل A إلى جبري A'
وكحالة خاصة هذه القضية صحيحة من أجل تشاكل الغمر القانوني

$$\pi : A \to A/I$$
$$x \mapsto x + I$$

إذاً: $D^r(A/I) = \pi(D^r A) = \pi(\{0\}) = I \quad , \forall r \geq 0$

A قابل للحل — حيادي (صفر) جبر الخارج

(القضية صحيحة من أجل أي تشاكل من A (جبري قابل للحل) إلى جبري A' فهي صحيحة من أجل تشاكل الغمر القانوني)

فالقضية صحيحة من أجل $r=n$ إذاً

$$D^n(A/I) = \pi(D^n A) = \pi(\{0\}) = I$$

ومنه A/I قابل للحل وهو المطلوب

* إن جبر الخارج لجبري القابل للحل يكون قابل للحل

مبرهنة:

ليكن A جبري على حلقة واحدية تبادلية R عندئذ:

• $D(D^n A) = D^{n+1} A \quad , \forall n \geq 1$

•• $D^n(D^m A) = D^{n+m} A \quad ; \forall n,m \geq 1$

البرهان:

- نبرهن الجزء الأول من هذه المبرهنة بالاستقراء الرياضي على r $(r \geq 1)$

- من أجل $r=1$ لدينا:

$$D(DA) = D[A,A] = [[A,A],[A,A]]$$
$$= [D^1A, D^1A] = D^2 A$$

فالقضية صحيحة من أجل $r=1$

/ /

.. نفرض صحة القضية من أجل r ولنبرهن صحتها من أجل r+1

$$D(D^r A) = D^{r+1} A$$ ← الفرض الاستقرائي

$$D(D^{r+1} A) \overset{??}{=} D^{r+2} A$$

$$L_1 = D(D^{r+1} A) = D[D^r A, D^r A]$$

$$= [[D^r A, D^r A], [D^r A, D^r A]]$$

$$= [D(D^r A), D(D^r A)]$$

حسب الفرض الاستقرائي $= [D^{r+1} A, D^{r+1} A]$

$= D^{r+2} A$ ← القضية صحيحة من أجل $\forall r$ فهي صحيحة من أجل n

ربما كان من المفروض عرض المبرهنة قبل عرض المتسلسلة

$$\begin{cases} D^1 A = [A, A] \\ D^2 A = D(DA) = [DA, DA] \\ D^3 A = D(D^2 A) = [D^2 A, D^2 A] \\ \vdots \end{cases}$$

حسب هذه المبرهنة (الأخيرة)

.. نبرهن بالاستقراء الرياضي بالنسبة لـ n:

.. من أجل n = 1 :

حسب الجزء الأول من المبرهنة

$$D^1(D^m A) = D^{m+1} A$$

.. نفترض أنها صحيحة من أجل n أي:

$$D^n(D^m A) = D^{n+m} A$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$:

$$D^{n+1}(D^m A) = D(D^n(D^m A))$$

$$= [D^n(D^m A) , D^n(D^m A)]$$

حسب الفرض الاستقرائي

$$= [D^{n+m} A , D^{n+m} A]$$

$$= D(D^{n+m} A)$$

$$= D^{n+m+1}$$ حسب الجزء الأول من البرهنة

$$= D^{(n+1)+m} A$$

23/10/2017

المحاضرة السابعة

★ نظرية:

ليكن A جبر لي وليكن I مثالي قابل للحل في A فإذا كان A/I قابل للحل عندئذ A قابل للحل.

(A/I قابل للحل و I قابل للحل $\Rightarrow$ A قابل للحل)

البرهان:

① لنفرض أن n، m طول الترتيب هو دليل قابلية الحل للمثالي I والجبر A/I عندئذ يكون:

$$D^n I = \{0\}$$

$$D^m (A/I) = I$$

من جهة أولى لدينا

② حسب مبرهنة سابقة:

أثبت في الامتحان أينما وجدت $\quad f(D^r A) = D^r(f(A))$

$$\forall r \geq 1 \quad , \quad \forall f \text{ تشاكل}$$

وبصورة خاصة المساواة صحيحة من أجل تشاكل الغمر القانوني π.

$$\pi : A \longrightarrow A/I$$

$$x \mapsto x + I$$

أي:

$$(1) \ldots \boxed{\pi(D^r A) = D^r(\pi(A)) \quad \forall r \geq 1}$$

$$\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A/I) = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi(D^m A) = I} \ldots (*)$$

من جهة أخرى سنبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي أن:

$$\boxed{\pi(D^r A) = D^r A + I} \ldots (2)$$

Alamal

/ /

من أجل $r=1$ فإن:

$$\pi(DA) \underset{\pi \text{ تشاكل}}{=} \pi[A,A] = [\pi(A), \pi(A)]$$

$$= [A/I, A/I] = [A,A] + I$$

$$= D^1A + I$$

محققة

نفرض أنها صحيحة من أجل r أي: $\pi(D^rA) = D^rA + I$

ولنبرهن على صحتها من أجل $r+1$

$$\pi(D^{r+1}A) \underset{\pi \text{ تشاكل}}{=} [\pi(D^rA), \pi(D^rA)]$$

$$\underset{\text{حسب الفرض الاستقرائي}}{=} [D^rA + I, D^rA + I]$$

$$\underset{\text{تعريف جبر الخارج}}{=} [D^rA, D^rA] + I$$

$$= D^{r+1}A + I$$

فالقضية محققة من أجل $r+1$ فهي صحيحة $\forall r \geq 1$ وبالتالي فهي صحيحة من أجل ذلك العدد الموجب m أي

$$\boxed{\pi(D^mA) = D^mA + I} \quad (**)$$

$I = J$

$\subset J$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$D^mA + I = I \Rightarrow D^mA \subset I$$

ومنه:

$$D^m(D^mA) \subset D^m I$$

حسب نتيجة: "إذا كان $H \subset B$ فإن $D^rH \subseteq D^rB$"

lamal

$$\Rightarrow D^{n+m}A \subseteq D^{n} I = \{0\} \Rightarrow D^{n+m}A = \{0\}$$

$\Rightarrow$ A جبري قابل للحل

(لكن ليس بالضرورة أن يكون دليله $n+m$)

هذه المبرهنة من المبرهنات الأساسية التي سنعتمد عليها لأن إثباتها دقيق على مجموعة جزئية من الجبر K

نظرية:

ليكن A جبري. إن تقاطع مثاليين قابلين للحل في A يكون مثالياً قابلاً للحل

(ويكفي أن يكون إحدى المثاليين I أو J قابلاً للحل)

البرهان:

ليكن I و J مثاليين قابلين للحل في جبري A ولنبين أن $I \cap J$ مثالي قابل للحل.

(1) نعلم أن تقاطع مثاليين هو مثالي (البرهن لأنها مبرهنة نظرية)

إذاً $I \cap J$ مثالي

(2) من جهة أخرى $I \cap J \subseteq I$ ولدينا $I \cap J$ هو مثالي فهو جبر جزئي و I جبر جزئي قابل للحل

وبما أن: كل جبر جزئي في جبري قابل للحل يكون قابلاً للحل

فإن $I \cap J$ قابل للحل

نظرية:

إن مجموع مثاليين قابلين للحل يكون مثالي قابل للحل.

البرهان:

نفرض أن I و J مثاليين قابلين للحل في جبري ولنبرهن أن $I+J$ مثالي قابل للحل. نعلم أن مجموع مثاليين هو مثالي إذاً $I+J$ مثالي

من جهة أخرى $I \cap J \subseteq I$ بحيث I مثالي قابل للحل

و $I \cap J$ مثالي

إذاً يمكن بناء جبر الخارج $I/_{I\cap J}$

لدينا $J + I \supseteq J$ وبالتالي يمكن بناء جبر الخارج $\frac{I+J}{J}$ ، $\frac{I+J}{I} \simeq \frac{J}{I\cap J}$

حيث J مثالي
$I+J$ مثالي (فهو جبر جزئي)

$I \subseteq I+J$

$I\cap J \subseteq J$

حسب مبرهنة التماثل الثالثة :

$$\underbrace{I/_{I\cap J}}_{\downarrow} \simeq \underbrace{\frac{I+J}{J}}_{\downarrow}$$

قابل للحل وبما أن J بالفرض قابل للحل يكون $J+I$ قابل للحل حسب المبرهنة الأخيرة

I قابل للحل و $I/_{I\cap J}$ قابل للحل اعتماداً على مبرهنة سابقة جبر الخارج لجبر لي قابل للحل يكون قابلاً للحل

نظرية :

ليكن I و J مثاليين قابلين للحل في جبر لي A عندئذ $[I, J]$ يكون قابلاً

البرهان : (ويكفي أن يكون أحد المثاليين قابل للحل)

نعلم أن $[I, J]$ هو مثالي في جبر لي A (حسب مبرهنة)

ولنبرهن أنه قابل للحل

لدينا $[I, J] \subset I$ وذلك وفقاً لطريقة بناء هذا المثالي وبما أن كلاً من $[I, J]$ و I هي جبور جزئية من جبر لي A وكون كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابلاً للحل فإننا نستنتج أن $[I, J]$ مثالي قابل للحل

/ /

★ نتيجة :

إذا كان A جبرلي وكان $DA=[A,A]$ مثالي قابل للحل في جبر لي A
عندئذٍ يكون A قابل للحل. A تبادلي و DA قابل للحل ⟸ A قابل للحل

الإثبات :

نشكل جبر لي الخارج A/DA فنجد أن:

$$[A/DA , A/DA] = [A,A] + DA = DA + DA = DA$$

وهذا بدوره يعني أن A/DA تبادلي فهو قابل للحل ودليله (1)
ولدينا فرضاً أن DA قابل للحل
⟸ استناداً لمبرهنة سابقة فإن A قابل للحل

ثانياً: جبور لي نصف البسيطة:

⟸ **تعريف 1**: يقال عن جبر لي A إنه نصف بسيط إذا لم يحوِ أي مثالي حقيقي تبادلي حيث أن المثالي يكون تبادلي إذا حقق $[I,I]=\{0\}$
(هلي)

⟸ **تعريف 2**: نقول عن مثالي أنه حقيقي إذا حقق $\{0\} \neq J \neq A$

نظرية :

★ ليكن A جبر لي فإن القضايا التالية متكافئة:
(1) .. A نصف بسيط
(2) .. A لا يملك أي مثالي حقيقي قابل للحل.
(3) ... $Rad\,A = \{0\}$ حيث $Rad\,A$ هو أكبر مثالي قابل للحل في جبر لي ويدعى بأساس هذا الجبر.

البرهان:

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ A نصف بسيط ⟸ A لا يملك أي مثالي حقيقي قابل للحل.
نفرض A نصف بسيط ، ولنفرض جدلاً أنه يوجد مثالي حقيقي قابل للحل في A وليكن J ولنعتبر أن دليله r عندئذٍ:

/ /

عندئذ: $D^r J = \{0\}$

$\Rightarrow [D^{r-1}J, D^{r-1}J] = \{0\}$

يتضح من ذلك أن $D^{r-1}J$ مثالي تبادلي في جبر لي.

أضف إلى ذلك أن $D^{r-1}J \neq \{0\}$ لأن r دليل قابلية الحل لـ J فهو أصغر عدد موجب حقق ذلك (أصغر من حقق ذلك)

كما أن حسب بناء المتسلسلة المشتقة في جبر لي يكون:

$D^{r-1}J \subseteq D^{r-2}J \subseteq \dots \subseteq D^1 J \subseteq J \subsetneq A$

كون J مثالي حقيقي

$\Rightarrow 0 \neq D^{r-1}J \subsetneq A$

إذاً تمكنا من إيجاد مثالي حقيقي تبادلي في جبر لي A

وهذا يناقض كون A نصف بسيط وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ

أي إن A لا علك أي مثالي حقيقي قابل للحل

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ A لا علك أي مثالي حقيقي قابل للحل $\overset{?}{\Leftarrow}$ A نصف بسيط

بما أن A لا علك أي مثالي حقيقي قابل للحل فهو لا علك أي مثالي حقيقي تبادلي وذلك لأن كل مثالي تبادلي يكون مثالياً قابلاً للحل.

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$ A لا علك أي مثالي حقيقي قابل للحل $\overset{?}{\Leftarrow}$ $Rad\, A = \{0\}$

إذا كان A لا علك أي مثالي حقيقي قابل للحل فإن:

$Rad\, A \xrightarrow{إما} \{0\}$ (لأن $Rad\,A$ هو أكبر مثالي حقيقي قابل للحل).

$\xrightarrow{أو} A$

لو فرضنا جدلاً أن $Rad\,A = A$ (A ليس مثالي حقيقي في نفسه ؟؟)

هذا يناقض تعريف $Rad\,A$

إذا كان $Rad A = A$ فإن A قابل للحل

وبالتالي أي مثالي حقيقي في A يكون قابل

الحل وهذا يناقض (2) فالفرض الجدلي خاطئ

$2 \Leftarrow 3$ | لنفرض أن $Rad\,A = \{0\}$ $\Leftarrow$ A لا يملك أي مثالي حقيقي قابل للحل لأن $Rad\,A$ هو أكبر مثالي قابل للحل في A

$1 \Leftarrow 3$ | لنفرض أن $Rad\,A = \{0\}$ ولنفرض جدلاً وجود مثالي حقيقي تبادلي وليكن I عندئذٍ I قابل للحل (كونه تبادلي فهو قابل للحل)
وهذا يناقض الفرض $Rad\,A = \{0\}$
وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ إذاً A نصف بسيط

$1 \Leftarrow 3$ ؟؟

يوجد مبرهنة في الكتاب بدون برهان ولم تذكر في المحاضرة: إذا كان I مثالي في جبر لي نصف بسيط A عندئذ A/I يكون نصف بسيط ص ١١٩

المحاضرة 8 - 9 ليس أكثر من 3 علامة في الامتحان من الأسئلة الدقيقة في البرهان

المحاضرة الثامنة

30 / 10 / 2017

★ نظرية:
إذا كان A جبر لي، إن جبر الخارج $A/RadA$ جبر لي نصف بسيط.

البرهان:
"جبر الخارج لجبر لي هو جبر لي"
سنبين فيما يلي أن جبر الخارج $A/RadA$ لا يحوي أي مثالي حقيقي قابل للحل (أي تبادلي)
بتعبير آخر سنبرهن أن أي مثالي قابل للحل في $A/RadA$ هو المثالي الصفري (صفر الخارج):

لكن $I/RadA$ مثالي قابل للحل في جبر لي الخارج $A/RadA$ سنبين أن $I=RadA$:
حيث I مثالي في A يحوي $RadA$.

لدينا: $\left.\begin{array}{l} I/RadA \text{ مثالي قابل للحل} \\ RadA \text{ مثالي قابل للحل} \end{array}\right\} \Rightarrow$ I مثالي قابل للحل

حسب مبرهنة: A جبر لي، I مثالي قابل للحل في A و A/I قابل للحل
عندئذ A قابل للحل

وبالتالي $I \subseteq RadA$

ولكن لدينا $RadA \subseteq I$ (حسب طريقة بناء المثالي في جبر الخارج $A/RadA$)

$\Rightarrow I = RadA$

ومنه $I/RadA = \underbrace{RadA}_{\text{صفر الخارج}}$ أي كل مثالي قابل للحل في جبر الخارج يكون المثالي الصفري (لا يملك أي مثالي حقيقي قابل للحل)

إذاً $A/RadA$ نصف بسيط

amal

نظرية:

لتكن I مثالي قابل الحل في جبري A. إذا كان A/I نصف بسيط

عندئذ $I = Rad A$.

البرهان:

لنبين I مثالي قابل الحل في A (فرضاً)

من جهة أخرى $Rad A$ مثالي قابل للحل في A (تعريفاً)

و $I+Rad A$ هو مثالي قابل للحل في A (حسب نظرية: مجموع مثاليين قابلين للحل هو مثالي قابل للحل)

ومنه $\frac{I+Rad A}{I}$ مثالي قابل للحل في A/I (A قابل للحل فإن جبر الخارج A/I قابل للحل) (يمكن بناء جبر الخارج)

ولكن A/I نصف بسيط (فرضاً)

مرفوضة ← $\left\{ \begin{array}{l} = A/I \\ = I/I \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \frac{I+Rad A}{I} = I/I$$

(حسب بناء المثاليات في جبر الخارج: $\frac{I+Rad A}{I}$ قابل للحل في A/I

A/I نصف بسيط عندئذ المثالي الوحيد القابل للحل هو المثالي الصفري في A/I ⇐ ($\frac{I+Rad A}{I} = I/I$)

$$\Rightarrow I + Rad A \subseteq I$$

ولكن $I \subseteq I + Rad A$

$$\Rightarrow I + Rad A \subseteq I \subseteq I + Rad A$$

$$\Rightarrow I = I + Rad A$$

وهذا يعني أن $Rad A \subseteq I$ ولكن المعلوم أن $I \subseteq Rad A$

$$\Rightarrow I = Rad A$$

الصورة المباشرة لجبري مثالي [illegible] مثالي [illegible] تماثل الحل هي [illegible] ومحاسن الحل [illegible] غامر

/ /

* نظرية:

إذا كان $f: A \to A'$ تشاكل غامر لجبري لي A و A' عندئذ الصورة المباشرة لأي مثالي يكون مثالي.

البرهان:

ليكن J مثالي في A وسنبرهن أن $f(J)$ مثالي في A'

كون f غامر، سنبين أن:

$[f(J), f(A)] = f[J, A'] \subseteq f(J)$

$D^n(f(J)) = f(D^n J)$

كون f غامر فإن $f(A) = A'$

/ /

★ نظرية:

إذا كان $f: A \to A'$ تشاكل غامر جبري لـ A', A

إذن $f(Rad A) = Rad A'$

مثالي قابل للحل

البرهان:

نشكل التطبيق:

$$\psi : \underbrace{A/_{Rad A}}_{\text{جبري}} \longrightarrow \underbrace{A'/_{f(Rad A)}}_{\text{جبري}}$$

$$\psi(x + Rad A) = f(x) + f(Rad A)$$

① • ψ تشاكل بين جبري لـ $A/_{Rad A}$, $A'/_{f(Rad A)}$ لأن:

في الامتحان هل داعم أو لا... لزوم التشاكل

• $\psi((x + Rad A) + (x' + Rad A)) \underset{I}{=} \psi((x + x') + Rad A)$

حسب تعريف (+) على جبري الخارج $(x + I) + (x' + I) = (x + x') + I$

$= f(x + x') + f(Rad A)$

$= (f(x) + f(x')) + f(Rad A)$

$= (f(x) + f(Rad A)) + (f(x') + f(Rad A))$

$= \psi(x + Rad A) + \psi(x' + Rad A)$

من تعريف قانون التشكيل الخارجي في جبري

•• $\psi(\lambda . (x + Rad A)) \overset{\uparrow}{=} \psi(\lambda x + Rad A)$

$= f(\lambda x) + f(Rad A)$ حسب تعريف ψ

$= \lambda \underbrace{f(x)}_{\in A'} + \underbrace{f(Rad A)}_{\in A'}$ f تشاكل

Alamal

حسب تعريف (.) في جبر A' الخارجي $= \lambda.(f(x) + f(\mathrm{Rad}A))$

$$= \lambda.\Psi(x + \mathrm{Rad}A)$$

$$\therefore \Psi[x + \mathrm{Rad}A,\ y + \mathrm{Rad}A] = \Psi([x,y] + \mathrm{Rad}A)$$

حسب تعريف [,] في جبر الخارج

$$= f[x,y] + f(\mathrm{Rad}A)$$

$$= [f(x), f(y)] + f(\mathrm{Rad}A)$$

$$= [f(x) + f(\mathrm{Rad}A),\ f(y) + f(\mathrm{Rad}A)]$$

$$= [\Psi(x + \mathrm{Rad}A),\ \Psi(y + \mathrm{Rad}A)]$$

[illegible]

مما سبق نجد أن Ψ تشاكل.

Ψ غامر: لكن $x' + f(\mathrm{Rad}A) \in A'/f(\mathrm{Rad}A)$ حيث $x' \in A'$

f غامر $\Longrightarrow \exists x \in A;\ f(x) = x' \Rightarrow x' + f(\mathrm{Rad}A) = f(x) + f(\mathrm{Rad}A)$

$$= \Psi(x + \mathrm{Rad}A)$$

$\Rightarrow \exists\ x + \mathrm{Rad}A \in A/\mathrm{Rad}A;\ \Psi(x + \mathrm{Rad}A) = x' + f(\mathrm{Rad}A)$

$$= \Psi(x + \mathrm{Rad}A)$$

$\Leftarrow$ Ψ تشاكل غامر بين جبري لي

استناداً إلى مبرهنة التماثل الأولى يكون: $f: A \to A'$ تشاكل بين جبريين A, A' فإنه:

$A/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

$$\frac{A/RadA}{\ker\psi} \cong A'/f(RadA)$$

أيضاً $A/RadA$ هو جبري نصف بسيط (حسب مبرهنة: A جبري إن جبر الخارج $A/RadA$ جبري نصف بسيط)

ومنه $\dfrac{A/RadA}{\ker\psi}$ هو جبري نصف بسيط لأن جبر الخارج لجبري نصف البسيط يكون كذلك

ومنه $A'/f(RadA)$ نصف بسيط

ولكن $f(RadA)$ مثالي قابل للحل في A'

لأن: (الصورة الباشرة لمثالي قابل للحل وفق أي تشاكل يكون قابلاً للحل)

$\Leftarrow$ بالاعتماد على نظرية سابقة يكون:

(A جبري، I مثالي قابل للحل في A، A/I نصف بسيط $\Leftarrow$ $I = RadA$)

A'/J نصف بسيط $\Leftarrow$ J قابل للحل في A'

$\Leftarrow$ $J = RadA'$

A' جبري، $f(RadA)$ مثالي قابل للحل في A'، $A'/f(RadA)$ نصف بسيط

$\Rightarrow f(RadA) = RadA'$

من خارج الكتاب

جبر لي العام $GL(n, \mathbb{C})$ وجبوره الجزئية :

الجبور الجزئية :

نعلم أن مجموعة جميع المصفوفات المربعة من المرتبة n على الحقل $\mathbb{C}$ $M_n(\mathbb{C})$ تشكل جبر لي وقد تم إثبات ذلك ، هذه المجموعة تدعى جبر لي العام.

إن المجموعات التالية تشكل جبور جزئية من $M_n(\mathbb{C})$:

* $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \; ; tr(M) = 0\}$

* $t(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \; ;$ مثلثية عليا $M\}$

* $\mathcal{N}(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \; ;$ مثلثية عليا وعناصر القطر الرئيسي متساوية $M\}$

* $\theta(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \; ;$ مثلثية عليا تماماً وعناصر القطر الرئيسي أصفار $M\}$

$[SL, SL] \subseteq SL$

من أجل $n = 2$:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, $tr(M) = a - a = 0$, $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' - ba' \\ ca' - ac' & cb' + aa' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b - b'a \\ c'a - a'c & c'b + a'a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} bc' - b'c & 2(ab' - a'b) \\ 2(\cancel{a}c'a - a'c) & cb' - c'b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b'c & 2(ab'-a'b) \\ 2(a'c-ac') & cb'-c'b \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

لأن:

$$bc'-b'c \qquad cb'-c'b=0$$

يطلب إثبات هذه الحقيقة من أجل $n=3$

الملاحظة: نعلم أن كل مثالي في جبر لي هو جبر جزئي ولكن العكس غير صحيح بالضرورة

ادرس هذه المجموعات الأربعة من أجل $n=3$ ، هل هي جبور جزئية

نتيجة: هذه المجموعات الأربعة هي جبور ولكن أياً منها مثالي هنا يكون لدينا مثال على أنه ليس بالضرورة أن يكون جبر جزئي هو مثالي في جبر لي.

المحاضرة التاسعة

6 / / 2017

جبر لي العام $GL(n, \mathbb{C})$ وجبوره الجزئية:

* $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C});\ tr(M) = 0\}$
* $t(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C});$ مثلثية عليا $M\}$
* $n(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C});$ مثلثية عليا وعناصر القطر الرئيسي متساوية $M\}$
* $O(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C});$ مثلثية عليا وعناصر القطر الرئيسي أصفار $M\}$

ملاحظة: كل مثالي في جبر لي هو جبر جزئي ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

$A, J] \subseteq J$ هو جبر جزئي فهو مقاس جزئي

أمثلة:

1 لنأخذ $t(2, \mathbb{C})$ ، هل هو مثالي في $GL(2, \mathbb{C})$

$[GL(2, \mathbb{C}), t(2, \mathbb{C})] \subseteq t(2, \mathbb{C})$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in t(2, \mathbb{C})$$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in t(2, \mathbb{C})$$

نلاحظ أن $t(2, \mathbb{C})$ جبر جزئي وليس مثالي في $GL(2, \mathbb{C})$

??

X (وهذا يؤكد أنه ليس بالضرورة أن كل جبر جزئي ليس مثالي)

Alamal

/ /

2

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$[A,B]=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\notin t(2,\mathbb{C})$$

يؤكد أنه ليس بالضرورة أن كل جبر جزئي ليس مثالي:

تمرين:

لنأخذ جبر لي $SL(2,\mathbb{C})$ ولنفرض أن:

$$e=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad h=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

قاعدة ما في هذا الفضاء. المطلوب:

أوجد مصفوفة تطبيقات الاشتقاق الداخلية ad_e, ad_f, ad_h

بالنسبة للقاعدة المذكورة

الحل:

* $ad_e: SL(2,\mathbb{C})\longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$

- $ad_e(e)=[e,e]=0=0e+0f+0h$
- $ad_e(f)=[e,f]=ef-fe=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=h$$

$$=0e+0f+1h$$

- $ad_e(h) = [e,h] = eh - he = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= -2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2e = -2e + 0f + 0h$

وبالتالي المصفوفة لتطبيق الاشتقاق الداخلي ad_e هي:

$$M_{ad_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$ad_e(e) = 0e + 0f + 0h$

$ad_e(f) = 0e + 0f + 1h$

$ad_e(h) = -2e + 0f + 0h$

** $ad_f : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})$

- $ad_f(e) = [f,e] = fe - ef = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -h = 0e + 0f - h$

- $ad_f(f) = [f,f] = 0 = 0e + 0f + 0h$

- $ad_f(h) = [f,h] = fh - hf$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2f = 0e + 2f + 0h$

/ /

← مصفوفة تطبيق الاشتقاق الداخلي ad_f هي :

$$M_{ad_f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$ad_f(e) = 0e + 0f - h$
$ad_f(f) = 0e + 0f + 0h$
$ad_f(h) = 0e + 2f + 0h$

*** $ad_h : SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C})$

• $ad_h(e) = [h,e] = he - eh = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2e = 2e + 0f + 0h$$

• $ad_h(f) = [h,f] = hf - fh$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -2f$$

$$= 0e - 2f + 0h$$

• $ad_h(h) = [h,h] = 0 = 0e + 0f + 0h$

وبالتالي مصفوفة تطبيق الاشتقاق الداخلي ad_h هي :

$$M_{ad_h} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$ad_h(e) = 2e + 0f + 0h$
$ad_h(f) = 0e - 2f + 0h$
$ad_h(h) = 0e + 0f + 0h$

Alamal

/ /

نلاحظ الجدول التالي:

$[\,,\,]$	e	f	h
e	0	h	$-2e$
f	$-h$	0	$2f$
h	$2e$	$-2f$	0

$[e,e]=0 \qquad [f,e]=-h$

$[e,f]=h \qquad [f,f]=0$

$[e,h]=-2e \qquad [f,h]=2f$

$[h,e]=2e$

$[h,f]=-2f$

$[h,h]=0$

جبر لي البسيط:

★ ← تعريف: هو جبر لي غير تبادلي ولا يحوي أي مثالي حقيقي.

// هام // ★ تمرين: بين أن $SL(2,\mathbb{C})$ بسيط؟

الحل: نلاحظ أنه غير تبادلي لأن: $[SL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{C})] \neq 0$

(من الجدول)

من جهة أخرى لنفرض أن J مثالي في هذا الجبر غير صفري

ولنبرهن أن $J = SL(2,\mathbb{C})$

المثاليات فيه إما صفر

(لا يحوي أي مثالي حقيقي أي إن أي مثالي فيه ومغاير للصفر هو $SL(2,\mathbb{C})$ نفسه)

عندئذ J يحوي على الأقل عنصراً من عناصر القاعدة

(J مثالي غير صفري وبالتالي منه جبر جزئي من جبر لي منه جبر لي وبالتالي

~~[illegible]~~ وبالتالي كل عنصر من هذا الجبر يكتب كتركيب

خطي وحيد بدلالة عناصر القاعدة)

لنميز ما يلي:

① لنفرض أن $e \in J$ عندئذ:

$$\underset{\in SL}{[e,f]} = h \in J \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}[h,f] \in J \\ \Rightarrow f \in J, \end{array} \right.$$

/ /

← لا يحوي جميع عناصر القاعدة ومنه $J = SL(2,\mathbb{C})$

(لأن مثالي في SL إذا حوى جميع عناصر القاعدة فهو يحوي أي عنصر من الجبر فهو جبر).

② لنفرض أن $f \in J$ عندئذ بنفس الأسلوب نجد أن $e, h \in J$ وبالتالي $J = SL(2,\mathbb{C})$

③ لنفرض أن $h \in J$ عندئذ بنفس الأسلوب نجد أن $e, f \in J$ ومنه $J = SL(2,\mathbb{C})$

يتضح من ذلك أن $SL(2,\mathbb{C})$ جبر لي العقدي غير تبادلي ولا يحوي أي مثالي حقيقي فهو بسيط

المركز والممركز في جبر لي:

المركز في جبر لي:

← تعريف: ندعو مركز جبر لي A مجموعة العناصر من A التي تتصف بخاصية الإبدال مع جميع عناصر A

$$Cen A = \{x \in A ;\ [x,y] = 0 ,\ \forall y \in A\}$$

مبرهنة:

إن مركز جبر لي A يكون مثالياً في A

الإثبات:

① إن $0 \in Cen A$ لأن $[0,z] = 0 ,\ \forall z \in A$

إذاً $Cen A \neq \phi$.

② الآن لنثبت أن: $x, x' \in Cen A ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta x' \in Cen A$

Alamal

/ /

$[\alpha x + \beta x', y] = 0 \quad , \forall y \in A \Rightarrow$ مقاس $\in$ Cen A

وهي محققة استناداً لمفهوم مركز جبري

$[A, \text{Cen} A] \overset{?}{\subset} \text{Cen} A$

علينا إثبات ما يلي:

لنأخذ: $x \in \text{Cen} A$ و $y \in A$ ولنبرهن أن $[y, x] \in \text{Cen} A$

أي يجب أن يتحقق:

$\forall z \in A : \; [[y, x], z] = 0$

$$L_1 = [[y,x], z] = [z, [x,y]] \overset{\text{جاكوبي}}{=} -\underbrace{[\underset{\in \text{Cen}A}{x}, \underbrace{[\underset{\in A}{y}, \underset{\in A}{z}]}_{\in A}]}_{} - [\underset{\in A}{y}, \underbrace{[\underset{\in A}{z}, \underset{\in \text{Cen}A}{x}]}_{=0}] = 0$$

أثبت أن Cen A هو مثالي مميز في A

الإثبات:

دامه أنه مقاس مميز في A، لإتمام المطلوب يكفي أن نبرهن أنه مستقر بالنسبة لتطبيقة الاشتقاق الداخلية على A

$ad_x(\text{Cen} A) \subset \text{Cen} A$

لكن $y \in \text{Cen} A$ ولنبرهن أن $[x, y] \in \text{Cen} A$

بتعبير آخر سنبرهن أن:

$$[[\underset{A}{x}, \underset{\text{Cen}A}{y}], \underset{A}{z}] = 0 \quad , \forall z \in A$$

$$= -[z, [x,y]] - [x, \underbrace{[y,z]}_{0}] + [\underset{\text{Cen}A}{y}, \underbrace{[z, x]}_{\in A}] = 0$$

فالمثالي المميز مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق

$\forall d \in \text{Cen} A \quad , \forall x \in A$

$[dx, z] = d[x, z] - [x, dz] = 0 \quad \forall z \in A$

$\Leftarrow dx \in \text{Cen}A \Leftarrow$ Cen A مثالي مميز

$d[x,z] = [dx, z] + [x, dz]$

/ /

المركز في جبرلي:

تعريف: ليكن A جبرلي و S مجموعة جزئية في A ندعو مركز المجموعة الجزئية S بمجموعة العناصر المتبادلة مع جميع عناصر S

$$Cen_A S = \{x \in A;\ [x,s]=0,\ \forall s \in S\}$$

حالة خاصة: $S = A$ عندها يتطابق مفهوم المركز مع مفهوم المركز.

مبرهنة:

إن مركز أي مجموعة جزئية S من جبرلي يكون جبراً جزئياً من A.

الإثبات:

$$Cen_A S = \{x \in A;\ [x,s]=0,\ \forall s \in S\}$$

نريد إثبات أن هذه المجموعة هي جبر جزئي من A

$$0 \in Cen\, S:\ [0,s]=0,\ \forall s \in S$$

• لنبرهن أن $\alpha x+\beta x' \in Cen\, S$ وحتى يتم المطلوب يجب أن يتحقق

$$\forall s \in S:\ [\alpha x+\beta x', s]=0$$

ليكن $s \in S$

$$[\alpha x+\beta x', s] = \alpha [x,s] + \beta [x',s]$$
$$= \alpha(0) + \beta(0) = 0$$

• لنبرهن الآن أن:

$$[Cen\, S,\ Cen\, S] \subset Cen\, S$$

أي نبين أن:

$$[[x,y],s] = 0,\ \forall s \in S$$

جاكوبي

$$L_1 = [[x,y],s] = -[s,[x,y]] = [x,[y,s]] + [y,[s,x]]$$

$$= 0$$

تمرين: برهن أن ممركز أي مثالي مميز في جبر لي A يكون مثالي مميز في A

حيث: $Cen_A J = \{x \in A;\ [x,s] = 0,\ \forall s \in J\}$

الحل:

ليكن J مثالي مميز في جبر لي A، من السهل رؤية أن

$Cen_A J$ مقاس جزئي في A

إذا كان $\forall x \in J,\ y \in Cen_A J,\ d \in Der(A)$

فإن:

$$d[x,y] = [dx,y] + [x,dy]$$

استناداً إلى كون $[x,y]=0$ ينتج أن:

$$[dx,y] = [dy,x]$$

وبملاحظة أن $dx \in J$ لأن J مثالي مميز بالفرض فإن

$$[dy,x] = 0$$

ومنه $dy \in Cen_A J$

إذاً $Cen_A J$ مثالي مميز في A.

$d(Cen\,J) \subset Cen\,J$

$dy \in Cen\,J,\ \forall y \in Cen\,J$

$[x,dy] = 0,\ \forall x \in J$

لدينا أن:

$$\underbrace{d[x,y]}_{=0} = \underbrace{[dx,y]}_{=0} + \underbrace{[x,dy]}_{=0}$$

J مثالي مميز $\quad \in Cen\,A$

/ /

التمثيل المرافق لجبر لي على حقل :

ليكن A جبر لي على حقل K ولنأخذ التطبيق:

$$ad : A \to GL(A)$$
$$x \mapsto ad(x) = ad_x$$

حيث $GL(A)$ هو جبر لي المكون من مجموعة كل التشاكلات في A

نعلم أن

$$Inn(A) \subseteq Der(A) \subseteq GL(A)$$

نلاحظ أن :

$$Inn(ad) = Inn(A)$$

لنبرهن أن التطبيق ad هو تمثيل جبر لي A أي سنبرهن أن ad هو تشاكل بين جبر لي A و $GL(A)$

← كل تشاكل من هذا النمط ندعوه تمثيل مرافق لجبر لي A

لنبرهن أن :

$$ad(x+y) = ad(x) + ad(y)$$
$$ad_{x+y} = ad_x + ad_y$$

لنفرض أن $z \in A$ عندئذ :

$$ad_{x+y}(z) = [x+y, z] = [x,z] + [y,z]$$
$$= ad_x(z) + ad_y(z)$$
$$= (ad_x + ad_y)(z)$$

$$\Rightarrow ad_{x+y} = ad_x + \cancel{d}ad_y$$

وهو أثبتنا تحقق الشروط

$\Leftarrow$ ad هو تشاكل بين جبري A و $GL(A)$

ملاحظة: نواة التمثيل المرافق هي $\ker(ad) = Cen\,A$

8 / 11 / 2017

المحاضرة العاشرة

تمارين :

1 إذا كان A جبر لي بسيط على حقل ما أثبت أن $Cen(A) = \{0\}$

الحل : (A بسيط إذا كان غير تبادلي ولا يحوي أي مثالي حقيقي) .

إن $Cen(A)$ هو مثالي في A وبما أن A بسيط فلدينا احتمالين :

إما ~~$Cen(A) = 0$~~

أو $Cen(A) = A$

لنفرض أن $Cen(A) = A$ ، نعلم أن $\boxed{[A, Cen(A)] = \{0\}}$

ومنه فإن

$$[A, A] = [Cen(A), Cen(A)] = \{0\}$$

وهذا يعني أن A تبادلي وهذا يناقض كون A بسيط

ومنه $Cen(A) = \{0\}$

2 ليكن A جبر لي أثبت صحة ما يلي :

A قابل للحل $\Leftrightarrow$ $Inn(A)$ جبر جزئي قابل للحل في $GL(A)$

الحل :

$\Leftarrow$ لنأخذ التمثيل المرافق لجبر لي : $ad: A \to GL(A)$

$Im(ad)$ هو جبر جزئي قابل للحل $\Leftarrow$ $Inn(A)$ جبر جزئي قابل للحل في $GL(A)$

$\Rightarrow$ نعلم أن $Ker(ad) = Cen(A)$ وهو مثالي في A

وفقاً لمبرهنة التماثل :

$$A/ker(ad) \cong Im(ad)$$

$$\Rightarrow A/Cen(A) \cong Inn(A)$$

استناداً للفرض : $A/Cen(A)$ قابل للحل ، $Cen(A)$ مثالي في A

قابل للحل (لأنه تبادلي وكل تبادلي قابل للحل وبالتالي 1 :)

/ /

$\Leftarrow$ A قابل للحل (حسب مبرهنة سابقة).

السلسلة المركزية المتزايدة:

لتكن A جبري، ولتكن:

$A_{[0]} = \{0\}, A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[i]}, \ldots$

متتالية من المجموعات الجزئية من A حيث:

$$\frac{A_{[i]}}{A_{[i-1]}} = Cen\left(\frac{A}{A_{[i-1]}}\right), \forall i = 1, 2, \ldots$$

$$A_{[0]} = \{0\}$$

$$A_{[1]} = \{x_2 \in A ; [x_1, x_2] = 0, \forall x_1 \in A\} = Cen A$$

وفقاً لتعريف المتتالية فإن: $\frac{A_{[1]}}{A_{[0]}} = Cen\left(\frac{A}{A_{[0]}}\right) \Leftarrow \frac{A_{[1]}}{A_{[0]}} = Cen\left(\frac{A}{\{0\}}\right)$

ومنه $A_{[1]} = Cen(A)$ لأن:

$$x \in A_{[1]} \Leftrightarrow x + \{0\} \in \frac{A_{[1]}}{\{0\}} \Leftrightarrow x + \{0\} \in Cen\left(\frac{A}{\{0\}}\right)$$

$$\Leftrightarrow [x + \{0\}, y + \{0\}] = \{0\} ; \forall y \in A$$

$$\Leftrightarrow [x, y] + \{0\} = \{0\} ; \forall y \in A \Leftrightarrow [x, y] = 0 ; \forall y \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in Cen A$$

$$A_{[2]} = \{x_3 \in A ; [x_1, [x_2, x_3]] = 0, \forall x_1, x_2 \in A\}$$

$$A_{[3]} = \{x_4 \in A ; [x_1, [x_2, [x_3, x_4]]] = 0 ; \forall x_1, x_2, x_3 \in A\}$$

$$A_{[n]} = \{x_{n+1} \in A ; [x_1, [x_2, \ldots [x_n, x_{n+1}]]] = 0 ; \forall x_1, \ldots, x_n \in A\}$$

/ /

نلاحظ ما يلي : $0 \in A_{[2]}$

$A_{[2]}$ مقاس جزئي من A ، في الواقع إذا كان $z_1, z_2 \in A_{[2]}$

فإن : ثنائي الخطية $[\,,\,]$

$$[x, [y, z_1 + z_2]] = [x, [y, z_1]] + [x, [y, z_2]]$$

$$= 0 + 0$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 \in A_{[2]}$$

من جهة أخرى : $\alpha \in K$

$$z \in A_{[2]} \quad , \quad [x, [y, \alpha z]] = \alpha [x, [y, z]] = \alpha . 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha z \in A_{[2]}$$

يمكن تعميم هذه الفكرة من أجل بقية المجموعات

نظرية : لتكن A جبر لي عندئذ $A_{[n]}$ مثالي مميز في A

البرهان :

① في الواقع ، إن $A_{[n]}$ مقاس جزئي من A

لنبرهن أن :

$$\forall x_{n+1}, y_{n+1} \in A_{[n]} \; , \; \forall \alpha, \beta \in R$$

$$\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \in A_{[n]}$$

أي لنبرهن :

$$[x_1, [x_2, [x_3, \dots [x_n, \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}]]] = 0$$

وذلك :

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in A$$

نلاحظ أن ذلك صحيح وفقاً لتعميم الفكرة الواردة قبل البرهان

$$\in, = \alpha [x_1, [x_2, [x_3 \dots [x_n, x_{n+1}]] \dots] +$$

$$\beta [x_1, [x_2, [x_3 \dots [x_n, y_{n+1}]] \dots]$$

$$\Rightarrow \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \in A_{[n]}$$

(2) سنبين أن $A_{[n]}$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق الداخلية على A.

أي سنبرهن : $\forall d \in Der(A) : d(A_{[n]}) \subset A_{[n]}$

بتعبير آخر: $\forall z \in A_{[n]}, \forall d \in Der(A) : d(z) \in A_{[n]}$

من أجل ذلك يجب أن نبرهن أن:

$$[x_1, [x_2, [x_3 \dots [x_n, dz]] \dots] = 0, \forall x_i \in A \ (1 \le i \le n)$$

$$[x, y] = [dx, y] + [x, dy]$$

$$[x, [y, z]] = [dx, [y, z]] + [x, d[y, z]]$$

$$[dx, [y, z]] + [x, [dy, z]] + [x, [y, dz]]$$

ويمكن تعميم ذلك

$$[x_1, [x_2, [x_3, [\dots [x_n, z]] \dots]) =$$

$$\underbrace{[dx_1, [x_2, \dots, [x_n, z]]]}_{\in A} + [x_1, [dx_2, [x_3, \dots, [x_n, z]] \dots] + \dots + [x_1, [x_2, [x_3 \dots [dx_n, z]]]$$

$$+ [x, [x_2, [x_3, \dots, [x_n, dz]]]$$

/ /

إن $z \in A_{[n]}$ فتركيبها مع n عنصر من A يساوي الصفر

و d تطبيق اشتقاق ينقل الصفر إلى الصفر

لأن الطرف الأيسر معدوم باستثناء الحد الأخير أما الطرف الأيمن فهناك n

حد من حدوده الأولى معدومة ويبقى الأخيرة وبذلك يتضح أن (الحد الأخير $=0$)

$$dz \in A_{[n]}$$

ملاحظة: وفق ما ورد أعلاه أصبح لدينا سلسلة من المثاليات المميزة في جبر لي.

نظرية:

ليكن A جبر لي عندئذ $A_{[n-1]}$ يكون مثالياً في $A_{[n]}$ وذلك $\forall n \geq 1$

الإثبات:

لنبرهن أن: $[A_{[n-1]}, A_{[n]}] \subset A_{[n-1]}$

أي لنبرهن أن: $A_{[n-1]} \subseteq A_{[n]}$

$$x_n \in A_{[n-1]} \Rightarrow [x_1, [x_2, [\dots [x_{n-1}, x_n]]] = 0 \ ;$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A$$

وبما أن $[x_0, 0] = 0$ وذلك أياً كان $x_0 \in A$ فيتضح أن:

$$[x_0, [x_1, [x_2, \dots, [x_{n-1}, x_n]] \dots] = 0 \ ; \ \forall x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A$$

$$\Rightarrow x_n \in A_{[n]}$$

لنبين أن $A_{[n-1]}$ مقاس جزئي في $A_{[n]}$

ليكن $x_n, y_n \in A_{[n-1]}$, $\forall \alpha, \beta \in R$ فإن:

$$[x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},\alpha x_n+\beta y_n]]\dots] =$$

$$\alpha[x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},x_n]]\dots]+\beta[x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},x_n]]\dots]=0$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A$$

$$\Rightarrow \alpha x_n+\beta y_n \in A_{[n-1]}$$

يكفي حتى يتم المطلوب أن نبين أن:

$$[A_{[n-1]}, A_{[n]}] \subseteq A_{[n-1]}$$

ليكن $y \in [A_{[n-1]}, A_{[n]}]$ عندئذ:

$$\exists\, x_{n+1} \in A_{[n]},\ x_n \in A_{[n-1]} ;$$

$$y = [x_n, x_{n+1}]$$

$$\Rightarrow [x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},[x_n,x_{n+1}]]\dots]=0, \forall x_1,\dots,x_n \in A$$

$$\Rightarrow [x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},y]]\dots]=0$$

$$\Rightarrow y \in A_{[n-1]}$$

فعلاقة الاحتواء صحيحة.

وهو المطلوب.

/ /

← تعريف: إن المتسلسلة $A_{[0]}=\{0\}, A_{[1]}=Cen A, A_{[2]}, A_{[3]}, \dots, A_{[n]}$ هي متسلسلة متزايدة من المثاليات المميزة في جبر لي A تدعى بالمتسلسلة المركزية المتزايدة.

المتسلسلات المركزية المتناقصة وجبور لي عديمة القوى:

← تعريف:
ليكن A جبر لي ولنعرف المتتالية:

$$C^1A=A$$
$$C^2A=[A,A]$$
$$C^3A=[A,[A,A]]=[A,C^2A]$$
$$C^4A=[A,C^3A]$$
$$\vdots$$
$$C^{n+1}A=[A,C^nA]$$

نحصل على متتالية من المثاليات المميزة في جبر لي A تدعى بالمتسلسلة المركزية المتناقصة.

جبور لي عديمة القوى:

← تعريف:
يقال عن جبر لي إنه عديم القوى إذا أمكننا إيجاد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $C^mA=\{0\}$.
إذا كان m أصغر عدد صحيح موجب يحقق $C^mA=\{0\}$ فيقال إن A جبر لي معدوم القوى دليله m

نظرية:

كل جبر لي عديم القوى يكون قابلاً للحل (العكس غير صحيح)

البرهان:

ليكن A جبر لي عديم القوى ولنفرض أن دليله m حيث $C^mA=\{0\}$

ولنبرهن بالاستقراء الرياضي أن

$$D^rA \subseteq C^{r+1}A \;;\forall r \geq 1$$

. من أجل $r=1$ عندئذ

$$DA = [A,A] = C^2A$$

. نفرض صحتها من أجل r

. نبرهن صحتها من أجل $r+1$

$$D^{r+1}A = [D^rA, D^rA] \subseteq [A, C^{r+1}A] = C^{r+2}A$$

حسب الفرض الاستقرائي

وبالتالي العلاقة صحيحة $\forall r \geq 1$ فهي صحيحة لأجل ذلك العدد الصحيح الموجب m أي

$$D^mA \subseteq C^{m+1}A \subseteq C^mA = \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad D^mA = \{0\}$$

ومنه A قابل للحل.

$Cen A = \{x \in A : [x,y]=0 \ \forall y \in A\}$

★ نظرية:

كل مثالي في جبر لي عديم القوى A يكون عديم القوى أيضاً.

البرهان:

لدينا من الفرض A جبر لي عديم القوى نفترض دليله m $C^m A = \{0\}$

وليكن $J \leq A$ (مثالي في هذا الجبر)

ولنبرهن أن J عديم القوى لذلك لنبرهن أن:

$C^r J \subseteq C^r A \ , \forall r \geq 1$

بالاستقراء الرياضي:

- من أجل $r=1$ $J \subseteq A$ ✓
- نفرض صحتها من أجل r
- نبرهن صحتها من أجل $r+1$

$C^{r+1} J = [J, C^r J] \subseteq [A, C^r A] = C^{r+1} A$

فالقضية محققة $\forall r \geq 1$ وبالتالي صحيحة من أجل الدليل m

لأن A عديم القوى.

$\Rightarrow C^m J \subseteq C^m A = \{0\}$

$\Rightarrow C^m J = \{0\}$

إذاً J عديم القوى.

★ نظرية:

ليكن A جبر لي عديم القوى وليكن J مثالي في A عندئذٍ جبر الخارج A/J يكون عديم القوى.

البرهان: A جبر لي عديم القوى نفترض دليله m $C^M A = \{0\}$

لنأخذ $\phi : A \to A/J \ ; x \mapsto x+J$ تشاكل الغمر القانوني

ولنبرهن بالاستقراء الرياضي أن:

$C^r(\phi(A)) = \phi(C^r A) \ ; \forall r \geq 1$

• من أجل $r=1$: $C^1(\phi(A)) = \phi(A) = \phi(C^1 A)$
تعريفاً

• نفترض صحة القضية من أجل r ولنبرهن من أجل $r+1$:

$$C^{r+1}(\phi(A)) = \phi(C^{r+1}(A))$$

$$L_1 = C^{r+1}(\phi(A)) = [\phi(A), C^r(\phi(A))]$$ حسب الفرض الاستقرائي

$$= [\phi(A), \phi(C^r(A))]$$ حسب الفرض الاستقرائي

$$= \phi[A, C^r(A)]$$ ϕ تشاكل

$$= \phi C^{r+1}(A)$$

فالعلاقة صحيحة $\forall r \geq 1$ فهي صحيحة من أجل الدليل m

$$C^m(\phi(A)) = \phi(C^m(A)) = \phi(\{0\}) = J$$

صفر جبر الخارج A/J

هذا يعني أن: $C^m(\phi(A)) \subset J$

$\Leftarrow$ $\phi(A)$ عديم القوى $\Leftarrow$ A/J عديم القوى.

15 / 11 / 2017

المحاضرة 11

نظرية:

إذا كان A جبر لي عديم القوى على حقل K عندئذ السلسلة المركزية المتزايدة

$$A_{[0]}, A_{[1]}, \dots, A_{[n]}, \dots \quad (*)$$

تكون منقطعة أي:

$$\exists\, t \geq 0 ;\ A_{[t]} = A$$

البرهان:

لنفرض m دليل انعدام جبر لي عندئذ $C^m A = \{0\}$

ومنه:

$$[A, [A, [A, \dots [A, A]], \dots] = \{0\}$$

$$\Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in A : [x_1, [x_2, [x_3, \dots, [x_{m-1}, x_m]]$$

$$\forall x_i \in A ;\ \quad 1 \leq i \leq m$$

وبما أن

$$A_{[r]} = \{x_{r+1} \in A ;\ [x_1, [x_2, \dots [x_r, x_{r+1}]] ;\ \forall x_i \in A ,\ 1 \leq i \leq r$$

نستنتج أن $x_m \in A_{[m-1]}$

وبالتالي $A_{[m-1]} = A$

وبناء على ذلك يوجد عدد صحيح موجب $t = m-1$ حيث $A_{[t]} = A$

وعليه السلسلة المركزية المتزايدة تكون منتهية الطول

$[x, y] = 0 ,\ \forall y \in A$

يعني أن $x \in Cen A$

$[A, [A, [A, \dots [A, A] \dots] = \{0\}$

$Cen^{m-1} A \subseteq Cen A$

$C^{m-1} A = \{0\}$

Alamal

/ /

نظرية: كل جبر لي عديم القوى A (على حقل K) مغاير للصفر يملك مركزاً غير صفري

الإثبات:

لبينا $A \neq \{0\}$ جبر لي عديم القوى ولنبرهن أن $CenA \neq \{0\}$

نفرض جدلاً أن $CenA = \{0\}$ عندئذ استناداً إلى خواص المتسلسلة المركزية المتزايدة نكون

$A_{[0]} = \{0\}$

$A_{[1]} = CenA = \{0\}$

ملاحظة: عودة إلى بناء المتسلسلة المركزية المتزايدة $A_{[0]}, A_{[1]}, \ldots, A_{[n]}, \ldots$ نبرهن على أن

$A_{[i]}/A_{[i-1]} \cong Cen(A/A_{[i-1]})$

$$A_{[2]}/A_{[1]} \cong Cen(A/A_{[1]})$$

$$A_{[2]}/A_{[1]} \cong \frac{A_{[2]}}{\{0\}} \cong Cen(A/\{0\})$$

$$A/\{0\} \cong A$$

انطلاقاً من بناء المتسلسلة المركزية المتزايدة نجد أن كل حد من المتسلسلة هو المثالي المميز الصفري وكذلك يناقض

وبالتالي $A_{[2]} \cong Cen A = \{0\}$

وهكذا بصورة عامة نجد $A_{[0]} \cong \{0\}, A_{[1]} \cong \{0\}, A_{[2]} \cong \{0\}, \ldots, A_{[r]} \cong \{0\}$

$\forall r \geq 0$

وبما أن A عديم القوى $\Leftarrow$ المتسلسلة المركزية منقطعة أي

$\exists t \in \mathbb{Z}^+ ; A_{[t]} = A$

نستنتج مما سبق أن $A = \{0\}$ ... $\Rightarrow A = \{0\}$

وهذا يناقض كون $A \neq \{0\}$

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $Cen(A) \neq \{0\}$ أي أن A يملك مركزاً غير صفري.

← **تعريف:** ليكن G جبر لي على حقل K نعرف منظم الجبر الجزئي S في G كما يلي:

$$N_G(S) = \{x \in G ; ad_x(S) \subseteq S\}$$

Normalization

lamal

تمرين: حدد منظم الجبر الجزئي $SL(2,\mathbb{C})$ من جبر لي $GL(2,\mathbb{C})$

الحل:

$$N_{GL}(SL(2,\mathbb{C})) = \{M \in GL(2,\mathbb{C});\ ad_M(SL(2,\mathbb{C})) \subset SL(2,\mathbb{C})\}$$

نبحث عن صيغة العناصر M

$$= \{M \in GL(2,\mathbb{C});\ ad_M(M') \in SL(2,\mathbb{C});\ \forall M' \in SL(2,\mathbb{C})\}$$

نوضح شكل المصفوفة التي تحقق الاحتواء

$$= \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C});\ [M, M'] \in SL(2,\mathbb{C})\right\}$$

حتى تنتمي المصفوفة لهذا الجبر الجزئي أي يجب أن نوجد صيغة عامة لعناصر مجموعة M التي تحقق الاحتواء

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C});\ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}\right] \in SL(2,\mathbb{C})\right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}\right] = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{MM' - M'M}$$

$$\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'-ba' \\ ca'+dc' & cb'-da' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a-a'c & c'b-a'd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'+bc'-a'a-b'c & ab'-ba'-a'b-b'd \\ ca'+dc'-c'a+a'c & cb'-da'-cb'+a'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab'-2a'b-b'd \\ 2a'c\ \ c'a+dc' & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

(مجموع عناصر القطر الرئيسي أصفار)

نستنتج بوضوح أن

$$N(SL(2,\mathbb{C})) = GL(2,\mathbb{C})$$

لأنه أياً كان $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ فإن

$[M, M'] \in SL(2,\mathbb{C})$ (لا يوجد أي شروط على عناصر M)

هذا يعني أن M تحقق الشرط دوماً

أي $M \in GL(2,\mathbb{C})$

/ /

تمرين: إذا كان G جبر لي و $G/CenG$ عديم القوى
بين أن G عديم القوى

الحل:
لدينا $G/CenG$ جبر لي الخارج ، وهو عديم القوى حسب الفرض
⇐ نفرض أن m هو دليل انعدام القوى ، بالتالي:

$$C^m(G/CenG) = CenG$$

$$\Rightarrow [G/CenG, [G/CenG, [\ldots, [G/CenG, G/CenG]\ldots] = CenG$$

حسب تعريف [,] على جبر الخارج $[G/CenG, G/CenG] = [G,G] + CenG$

نلاحظ أن

$$[G/CenG, [G/CenG, G/CenG]] = [G,[G,G]] + CenG$$

ومنه

$$[G,[G,\ldots,[G,G]],\ldots] + CenG = CenG$$

$C^mG + CenG = CenG$ $\quad I+J=J \Leftrightarrow I\subseteq J$ $\quad C^mA = [A, C^{m-1}A]$

$$\Rightarrow \underbrace{[G,[G,\ldots,[G,G]]\ldots]}_{m} \subseteq CenG$$

$$\Rightarrow \underbrace{[G,[G,[G,\ldots[G,G]\ldots]}_{m+1} = \{0\}$$

لأن $CenG$ يعني تركيبه مع أي عنصر من G يساوي 0

$$\Rightarrow C^{m+1}G = \{0\}$$

نتيجة: (تقبل دون برهان ونقبل الاستخدام المباشر لها)
ليكن G جبر لي على حقل K عندئذ:
(I) G قابل للحل $\Leftrightarrow$ $DG=[G,G]$ عديم القوى
(II) $O(n,\ell)$ جبر لي عديم القوى حيث $O(n,\ell)$ مثلثية عليا وعناصر القطر الرئيسي أصفار $n\geq 1$

إنا لم نعتمد على أشياء لم نأخذها موجودة في الماجستير

/ /

تمرين: أثبت أن $t(3,\ell)$ (مثلثية عليا) قابلة للحل.

لنثبت أن

$$D(t(3,\ell)) = [t(3,\ell), t(3,\ell)] \subseteq \theta(3,\ell)$$

حسب إجراء الضرب بالأمثلة

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \theta(3,\ell)$$

بعد إجراء عملية الضرب
مصفوفة مثلثية من الأعلى وعناصر
قطرها الرئيسي أصفار

$$\Rightarrow D(t(3,\ell)) \subseteq \theta(3,\ell)$$

ونعلم أن كل جبر جزئي من جبر لي عديم القوى يكون عديم القوى
وبالتالي $D(t(3,\ell))$ عديم القوى
ومنه اعتماداً على النتيجة السابقة (التي تقبل بدون برهان)
نجد أن $t(3,\ell)$ ~~عديم~~ قابل للحل

تمرين:

إذا كان $G \neq \{0\}$ جبر لي عديم القوى على حقل ما K أثبت أن
$Cen\, G \neq \{0\}$

الحل:

بما أن G جبر لي عديم القوى، لنكن دليله m أي $C^m G = \{0\}$
وبالتالي

$$[G, C^{m-1}G] = \{0\}$$

نشير إلى أن: $C^{m-1}G \neq \{0\}$ (لأن دليل انعدام القوى هو m) حسب تعريف دليل الانعدام

ومنه $[C^{m-1}G, G] = \{0\} \Rightarrow C^{m-1}G \subseteq Cen\, G$

وبما أن $C^{m-1}G \neq \{0\}$

نستنتج أن $Cen\, G \neq \{0\}$

صيغة Killing :

① تعريف: ليكن G جبر لي على حقل F

② $K: G \times G \to F$

تركيب تطبيقين

$$k(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y) \quad , \quad \forall x,y \in G$$

حيث tr هو أثر مصفوفة وهو مجموع عناصر قطرها الرئيسي

③ من الواضح أنه شكل ثنائي الخطية وهو متناظر وذلك بملاحظة أن

$$K(x,y) = tr(ad_y \circ ad_x) = tr(y,x)$$

$$D(t(3,\mathbb{C})) = [t(3,\mathbb{C}), t(3,\mathbb{C})] \overset{?}{\subseteq} n(3,\mathbb{C})$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' & ac'+be'+cf' \\ 0 & dd' & de'+ef' \\ 0 & 0 & ff' \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} aa' & a'b+b'd & a'c+b'e+c'f \\ 0 & dd' & d'e+e'f \\ 0 & 0 & ff' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in n(3,\mathbb{C}) \Rightarrow D(t(3,\mathbb{C})) \subseteq n(3,\mathbb{C})$$

⟸ $D(t(3,\mathbb{C}))$ عديم القوى ⟸ قابل للحل

المحاضرة 12   22 / 11 / 2017

صيغة killing:

ليكن G جبر لي على الحقل F. إن التطبيق:

$$K: G\times G \to F$$

$$k(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y)$$

حيث tr هو أثر مصفوفة وهو مجموع عناصر قطرها الرئيسي

من الواضح أنه شكل ثنائي خطي وهو متناظر وذلك بملاحظة أن

$$k(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y) = tr(ad_y \circ ad_x) = k(y,x)$$

نظرية:

إن صيغة killing لجبر لي G هو شكل ثنائي الخطية ومتناظر على G

زد على ذلك أنه متناوب

الإثبات:

للوصول للهدف علينا إثبات:

$$K(x,[y,z]) = k([x,y],z)$$

لذلك سنبرهن أن

$$k([x,y],z) - k(x,[y,z]) = 0$$

$$\mathcal{L}_1 = k([x,y],z) - k(x,[y,z])$$

$$= tr(ad_{[x,y]} \circ ad_z) - tr(ad_x \circ ad_{[y,z]})$$ حسب تعريف صيغة killing

$$= tr([ad_x, ad_y] \circ ad_z) - tr(ad_x \circ [ad_y, ad_z])$$

$$tr((ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x) \circ ad_z) - tr(ad_x \circ (ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_y))$$

$$= tr((ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - (ad_y \circ ad_x \circ ad_z))$$

$$- tr((ad_x \circ ad_y \circ ad_z) \mp (ad_x \circ ad_z \circ ad_y))$$

$tr(f\circ g) = tr(g\circ f)$

$= tr\left((ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - (ad_x \circ ad_z \circ ad_y)\right)$

$- tr\left((ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - (ad_x \circ ad_z \circ ad_y)\right)$

$= tr(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - tr(ad_x \circ ad_z \circ ad_y)$

$- tr(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) + tr(ad_x \circ ad_z \circ ad_y)$

$= 0$

$\Rightarrow K([x,y],z) - K(x,[y,z]) = 0$
$\Rightarrow K([x,y],z) = K(x,[y,z])$

تمرين: لتكن لدينا جبر لي $SL(2,\mathbb{C})$ ولنأخذ قاعدة في هذا الجبر:

$$S = \left\{ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

حدد صيغة killing على هذا الجبر $SL(2,\mathbb{C})$
وبين فيما إذا كانت هذه الصيغة غير متردية.

الحل:

$K(\ ,\ ) : SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$K(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y)$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix}$$

لنبحث أولاً عن مصفوفة ad_x بالنسبة للقاعدة والمصفوفة ad_y بالنسبة للقاعدة

- $ad_x(e) = [x, e] = x.e - e.x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 2\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\alpha e - \gamma . h$$

- $ad_x(f) = [x, f] = x f - f . x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -2\alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

$$= -2\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\alpha . f + \beta . h$$

- $ad_x(h) = [x, h] = x h - h x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ 2\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2\beta e + 2\gamma f$$

$$M_{ad_x} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & -2\beta \\ 0 & -2\alpha & 2\gamma \\ -\gamma & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdot\, ad_x(e) = 2\alpha e + 0f - \gamma h$

$\cdot\, ad_x(f) = 0e - 2\alpha f + \beta h$

$\cdot\, ad_x(h) = -2\beta e + 2\gamma f + 0h$

بنفس الأسلوب نجد

$$M_{ad_y} = \begin{bmatrix} 2\alpha' & 0 & -2\beta' \\ 0 & -2\alpha' & 2\gamma' \\ -\gamma' & \beta' & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdot\, ad_y(e) = 2\alpha' e + 0f - \gamma' h$

$\cdot\, ad_y(f) = 0e - 2\alpha' f + \beta' h$

$\cdot\, ad_y(h) = -2\beta' e + 2\gamma' f + 0h$

$$M_{ad_x} \circ M_{ad_y} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & -2\beta \\ 0 & -2\alpha & 2\gamma \\ -\gamma & \beta & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2\alpha' & 0 & -2\beta' \\ 0 & -2\alpha' & 2\gamma' \\ -\gamma' & \beta' & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\alpha\alpha' + 2\beta\gamma' & -2\beta\beta' & -4\alpha\beta' \\ -2\gamma\gamma' & 4\alpha\alpha' + 2\gamma\beta' & -4\alpha\gamma' \\ 2\gamma\alpha' & 2\alpha'\beta & +2\gamma\beta' + 2\beta\gamma' \end{bmatrix}$$

$$(x,y) = tr\,(ad_x \circ ad_y)$$

$$= 4\alpha\alpha' + 2\beta\gamma' + 4\alpha\alpha' + 2\gamma\beta' + 2\gamma\beta' + 2\beta\gamma'$$

$$= 8\alpha\alpha' + 4\beta\gamma' + 4\gamma\beta'$$

/ /

$K(x,y) = 8\alpha\alpha' + 4\beta\gamma' + 4\gamma\beta'$ (*) : صيغة killing

* هل صيغة killing لجبر لي $SL(2,\mathbb{C})$ غير متردية ؟

١- الطريقة الأولى:

$x=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ ، $y=\begin{bmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & -\alpha'\end{bmatrix}$

$\langle\, , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$

مصفوفة الشكل ثنائي الخطية:

$$\begin{bmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \langle e_1,e_3\rangle\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \langle e_2,e_3\rangle\\ & & \vdots\end{bmatrix} = M_{\langle , \rangle}$$

(مصفوفة الجداء الداخلي)

هذا التطبيق غير متردي إذا كان

$\det(M) \neq 0$

محدد مصفوفة التطبيق $\neq 0$

$.K(e,e)$; $e=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

أبدل في النتيجة (*)

$\alpha = \alpha' = 0$

$\beta = \beta' = 1$

$\gamma = \gamma' = 0$

$\Rightarrow K(e,e) = 0$

$.K(e,f)$; $e=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\alpha'=0\\ &\beta=1,\ \beta'=0\\ &\gamma=0,\ \gamma'=1\end{aligned}\right\} \overset{\text{نعوض}}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} K(e,f) = 4$$

$.K(e,h)$; $e=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $h=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

/ /

نبدل في النتيجة (*):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0\ ,\ \alpha'=1\\ \beta=1\ ,\ \beta'=0\\ \gamma=\gamma'=0\end{array}\right\}\Rightarrow k(\cancel{e},f)=0$$

$\cdot\ k(f,e)=4$ $\longleftarrow$ بسبب التناظر

$\cdot\ k(f,f)=0$ $\quad(\alpha=\alpha'=0,\ \beta=\beta'=0,\ \gamma=\gamma'=1)$

$\cdot\ k(h,e)=k(e,h)=0$

$\cdot\ k(h,f)=k(f,h)=0$ $\quad(\alpha=0,\ \alpha'=1,\ \beta=\beta'=0,\ \gamma=1,\ \gamma'=0)$

$\cdot\ k(h,h)=8$ $\quad(\alpha=\alpha'=1,\ \beta=\beta'=0,\ \gamma=\gamma'=0)$

ومنه مصفوفة الصيغ هي:

$$M_K=\begin{bmatrix}0&4&0\\4&0&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

$$\det M_k=0(0.8-0.0)-4(4.8-0.0)+0\neq 0$$

وبالتالي صيغة killing غير منتوية

2. طريقة ثانية: نوجد مصفوفة صيغة killing بالنسبة للقاعدة:

$$K=\begin{bmatrix}k(e,e)&k(e,f)&k(e,h)\\k(f,e)&k(f,f)&k(f,h)\\k(h,e)&k(h,f)&k(h,h)\end{bmatrix}$$

لا ننسى وجود تناظر

$\cdot\ k(e,e) = tr(ad_e \circ ad_e)$ $\qquad ad_e(e),\ ad_e(f),\ ad_e(h)$

حسبناها في تمرين سابق

$$ad_e \circ ad_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow k(e,e) = 0$

في تطبيق ... المصفوفات الناتجة ... $ad_e\, ad_f\, ad_h$ ... بين الصيغة Killing ... مترابطة ...

$\cdot\ k(e,f) = tr(ad_e \circ ad_f)$

$$ad_e \circ ad_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow k(e,f) = 4$

$\cdot\ k(e,h) = tr(ad_e \circ ad_h)$

$$ad_e \circ ad_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\cdot\ k(e,h) = 0$

$\cdot\ k(f,e) = k(e,f) = 4$ بالتناظر

$\cdot\ k(f,h) = tr(ad_f \circ ad_h)$

$$ad_f \circ ad_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k(f,h) = 0$

Alamal

/ /

- $k(h,e) = k(e,h) = 0$
- $k(h,f) = k(f,h) = 0$
- $k(h,h) = tr(ad_h \circ ad_h)$

$$k(f,f) = tr(ad_f \circ ad_f) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_h \circ ad_h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow k(h,h) = 8$

$$\Rightarrow M_k = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det M_k \neq 0$

نلاحظ أن محدد المصفوفة M_k غير معدوم وبالتالي صيغة
Killing غير متردية.

/ /

تمرين: مبرهنة: ليكن G مثالي في جبر لي G على حقل K عندئذ المجموعة:

$$J^{\perp} = \{x \in G \,;\, k(x,y) = 0 \,;\, \forall y \in J\}$$

تكون مثالي في جبر لي G

البرهان:

واضح أن $J^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من K

إثبات أن $J^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من K غير مطلوب

ولا ننظر إلى الإجابة في أثناء التصحيح

لإثبات أن $J^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من G يجب إثبات أن $J^{\perp} \neq \phi$

وأن $\alpha x + \beta y \in J^{\perp}$ وذلك $\forall \alpha, \beta \in K \,,\, \forall x, y \in J^{\perp}$

$$K(\alpha x + \beta y, z) = 0 \quad , \forall z \in J \qquad (\text{حسب صيغة killing})$$

نلاحظ أن

$$K(\alpha x + \beta y, z) = \alpha k(x,z) + \beta k(y,z)$$

وذلك لأن صيغة killing هي شكل ثنائي الخطية

$$\Rightarrow k(x,z) = k(y,z) = 0$$

وذلك لأنه:

$$k(x,z) = 0 \Leftarrow x \in J^{\perp}, \forall z \in J$$

$$k(y,z) = 0 \Leftarrow y \in J^{\perp}, \forall z \in J$$

$$\Rightarrow k(\alpha x + \beta y, z) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in J^{\perp}$$

كما أن $J^{\perp} \neq \phi$ وذلك لأن:

$k(0,z)=0 \,,\, \forall z \in J \Rightarrow 0 \in J^{\perp} \Rightarrow J^{\perp} \neq \phi$

وبالتالي $J^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي من G

* لإثبات أن $J^{\perp}$ مثالي في G يجب إثبات أن:

$ad_z(J^{\perp}) \subset J^{\perp} \quad , \forall z \in J$

أي يجب أن نبرهن أن:

$ad_z(x) \overset{?}{\in} J^{\perp} \quad ; \forall x \in J^{\perp}$

$[z,x] \overset{?}{\in} J^{\perp} \quad ; \forall x \in J^{\perp}$

أي يجب أن نبرهن:

$k([z,x],y)=0 \; ; \forall y \in J$

$k([z,x],y) = k(x,[y,z])$

وذلك لأن $y \in J$, $z \in J \Rightarrow [y,z] \in J$

و $x \in J^{\perp} \Rightarrow k(x,[y,z])=0$ وبالتالي $J^{\perp}$ مثالي في

/ /

★ معيار كارتان الأول:
ليكن G جبر لي على حقل K عندئذ:
G جبر لي قابل للحل $\Longleftrightarrow$ $K(DG, DG) = \{0\}$

★ معيار كارتان الثاني:
ليكن G جبر لي على حقل K عندئذ:
G جبر لي نصف بسيط $\Longleftrightarrow$ صيغة killing على G شكل ثنائي الخطية غير مترددة

← نستنتج على الفور إن $SL(2, \mathbb{C})$ جبر لي نصف بسيط.

الإثبات: (باتجاه واحد)
⇐ لنفرض أن G جبر لي نصف بسيط عندئذ:

$$G^{\perp} = \{x \in G ;\ K(x,y) = 0,\ \forall y \in G\}$$

هو مثالي في G (حسب المبرهنة السابقة)
ويلاحظ أن:

كون $G^{\perp}$ مثالي في G

$$D(G^{\perp}) = [G^{\perp}, G^{\perp}] \subseteq G^{\perp} \subseteq G$$

من تعريف $\perp$

$$\Rightarrow K(DG^{\perp}, DG^{\perp}) \subseteq K(G^{\perp}, G) \overset{\uparrow}{=} 0$$

وحسب معيار كارتان الأول:

$$K(DG^{\perp}, DG^{\perp}) = \{0\}$$

فإن $G^{\perp}$ جبر لي قابل للحل (وهو مثالي في جبر لي نصف بسيط)
أصبح لدينا مثالي قابل للحل في جبر لي نصف بسيط عندئذ:
إما $G^{\perp} = \{0\}$ أو $G^{\perp} = G$
(حسب مفهوم نصف البسيط)

Alamal

/ /

• إذا كان $G^{\perp}=\{0\}$ هذا يعني أن العنصر الوحيد المتبادل مع جميع عناصر G هو العنصر الصفري

⇐ صيغة killing هي شكل ثنائي الخطية غير مترد

• فإن $G^{\perp}=G$ فإن $K(G,G)=0$ و هذا يعني ان صيغة killing معدومة وهذا مستحيل كون G غير معدوم.

ملاحظة: يقال عن شكل ثنائي الخطية T أنه غير مترد إذا حقق مايلي: (منتظم)

$$\langle x,z\rangle=0\ ,\forall z\in G\ \Rightarrow\ x=0$$

$$\forall 0\neq x\in A:\ \exists x'\in A\ ;\ T(x,x')\neq 0$$

• يقال عن الشكل ثنائي الخطية إنه محدد موجب إذا كان $T(x,x)>0$ مهما كان $x\neq 0$ من A ، إذا حقق بالإضافة لذلك الشرط التالي

$$T(x,x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$$

• يقال عن الشكل ثنائي الخطية T إنه متناوب إذا كان:

$$T([x,y],z)=T(x,[y,z])\ ,\ \forall x,y,z\in A$$

بتعبير مكافئ:

$$T(ad_x(y),z)=T(x,ad_y(z))$$

/ /

نتائج، تتمات، متنوعات، دردشة :

1) نقبل دون برهان أن صيغة killing لجبر لي عديم القوى A على حقل K تكون صفراً

2) $M(n, \mathbb{C})$ ، $O(n, \mathbb{C})$ هي جبور لي عديمة القوى هل توافق ؟
من أجل $n=2$ أو $n=3$ أعط تبرير لذلك

3) $t(n, \mathbb{C})$ ، $n=3$ أثبت أن

$$D(t(3,\mathbb{C})) \subseteq O(3,\mathbb{C})$$

* لإثبات هذه الحقيقة نأخذ :

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} , \quad M' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha' & \beta' \\ 0 & 0 & \alpha'' \end{bmatrix}$$

يمكن أن نبرهن أن $[M, M']$ عبارة عن مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة مثلثية من الأعلى وعناصر قطرها الرئيسي معدومة
إذاً :

$$[t(3,\mathbb{C}), t(3,\mathbb{C})] \subset O(3,\mathbb{C})$$

ومنه

$$D(t(3,\mathbb{C})) \subseteq O(3,\mathbb{C})$$

أي $D(t(3,\mathbb{C}))$ هو جبر جزئي من جبر لي عديم القوى فهو عديم القوى
وبالتالي $t(3,\mathbb{C})$ قابل للحل حسب نتيجة سابقة
G قابل للحل $\Leftrightarrow$ DG عديم القوى

تمرين (1):
أثبت أن $t(3,\mathbb{C})$ مجموعة المصفوفات المربعة المثلثية العليا قابلة للحل

الحل:
برهنا سابقاً بلغة العناصر أن $[t(3,\mathbb{C}),t(3,\mathbb{C})]\subseteq \theta(3,\mathbb{C})$ (يجب الإثبات في الامتحان)
بتعبير آخر:

$$D(t(3,\mathbb{C}))\subseteq \theta(3,\mathbb{C})$$

نعلم أن كل جبر جزئي من جبر لي عديم القوى هو جبر لي عديم القوى.
إذاً $D(t(3,\mathbb{C}))$ عديم القوى اعتماداً على نتيجة تقبل بدون برهان
يكون $t(3,\mathbb{C})$ قابل للحل

ملاحظة: كل جبر لي عديم القوى يكون قابلاً للحل إلا أن العكس غير صحيح (وهنالك أمثلة على ذلك)

تمرين (2):
إن $\mathcal{M}(3,\mathbb{C})$ هو جبر جزئي مؤلف من مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة 3 وهي مثلثية عليا وعناصر قطرها الرئيسي متساوية
فهل

$$[\mathcal{M}(3,\mathbb{C}),\mathcal{M}(3,\mathbb{C})]\subseteq \theta(3,\mathbb{C})$$

الحل: لنفرض أن

$$M',M\in\mathcal{M}(3,\mathbb{C})$$

$$[M,M']=MM'-M'M$$

$$=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a'&b'&c'\\0&a&d\\0&0&a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a'&b'&c'\\0&a&d\\0&0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{bmatrix}$$

Alamal

$$= \begin{bmatrix} aa' & ab'+ba' & ac'+bd'+ca' \\ 0 & aa' & ad'+da' \\ 0 & 0 & aa' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a'a & a'b+ab' & a'c+b'd+c'a \\ 0 & a'a & a'd+d'a \\ 0 & 0 & a'a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \theta(3,\ell)$$

مصفوفة مثلثية ~~عير~~ عليا وعناصر قطرها الرئيسي معدومة

⇐ نستنتج بأسلوب مشابه للتمرين السابق أن $D(\mathfrak{M}(3,\ell))$ عديم القوى وبالتالي $\mathfrak{M}(3,\ell)$ قابل للحل.

تنويه: كل عديم القوى يكون قابل للحل ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

تمرين (3):

لتكن $G \neq \{0\}$ جبر لي غير معدوم على حقل F

المجموعة

$$G^{\perp} = \{x \in G;\ K(x,y)=0,\ \forall y \in G\}$$

مثالي في G.

أ) بين فيما إذا كان $G^{\perp}$ قابل للحل اعتماداً على معيار كارتان الأول.

ب) إذا كان G جبر لي نصف بسيط بين أن $G^{\perp}=\{0\}$

الحل:

أ) $K(DG^{\perp}, DG^{\perp}) \overset{?}{=} \{0\}$

لدينا. $[G^{\perp}, G] \subseteq G^{\perp}$ كون $G^{\perp}$ مثالي في G

ومنه

$$[G^{\perp}, G^{\perp}] \subseteq G^{\perp} \subseteq G$$

$DG^{\perp} \subseteq G^{\perp} \subseteq G$

$K(G^{\perp}, G^{\perp})$

$K(DG^{\perp}, DG^{\perp}) \subseteq K(G^{\perp}, G) = \{0\}$ نستنتج من ذلك

ومنه $G^{\perp}$ قابل للحل (استناداً إلى معيار كارتان الأول)

وهو المطلوب

ج) ما سبق لدينا $G^{\perp}$ مثالي قابل للحل في جبر لي نصف بسيط

غير حالتين:

إما $G^{\perp} = \{0\}$ عندها يتم المطلوب

أو $G^{\perp} = G$ عندئذ:

$K(G, G) = K(G^{\perp}, G) = \{0\}$

$(K(x,y) = 0 \ , \ \forall x, y \in G)$

هذا يعني أن صيغة Killing معدومة وهذا غير ممكن ومنه

$G^{\perp} = \{0\}$

تمرين (4):

لتكن G جبر لي نصف بسيط على حقل F

أثبت أن $Cen\, G = \{0\}$ وذلك وفق معيار كارتان الثاني

الحل: $Cen\, G$ هي نواة التمثيل المرافق

لتكن $c \in Cen\, G \Leftarrow c \in \ker ad$

$\Rightarrow ad_c = 0$

(إذا ركبنا ad_c مع أي تطبيق خطي تتلاشى)

$ad_x \circ ad_c = 0 \ , \ \forall x \in G$

$tr(ad_x \circ ad_c) = 0$

$K(x, c) = 0 \ , \ \underline{\forall x \in G}$

G جبر لي نصف بسيط
إذا كان $K(x,y) = 0$
$\forall x \in G$
$\Rightarrow y = 0$

بما أن G جبر لي نصف بسيط وصيغة Killing شكل ثنائي لا داخلية غير متردية إذاً $C=0$

$\Rightarrow \; Cen\, G = \{0\}$

تمرين: إذا كان G جبر لي نصف بسيط برهن على أن كل تطبيق اشتقاق داخليا هو تطبيق اشتقاق

انتهى قسم جبر لي

جبور BCK:

← تعريف: جبر BCK هو عبارة عن مجموعة A مزودة بعنصر مميز يرمز له "0" و عملية ثنائية يرمز لها "$*$" و تحقق الخواص التالية:

1] $x * x = 0$

2] $0 * x = 0$

3] $x * y = 0 \wedge y * x = 0 \Rightarrow x = y$

(لا يوجد عنصرين مختلفين متبادلين معاً من اليمين واليسار)

4] $(x * (x * y)) * y = 0$

5] $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

وذلك $\forall x, y, z \in A$

← عند تحقق الشروط السابقة نقول عن الثلاثية $(A, 0, *)$ بأنها جبر BCK

← مبرهنة:

إذا كان A جبر BCK و $x * 0 = 0$ فإن $x = 0$

الإثبات:

نعلم أن $0 * x = 0$ (حسب الخاصة الثانية في تعريف جبر BCK)

ولدينا من الفرض $x * 0 = 0$

عندئذ حسب الخاصة (3) نجد $x = 0$

$(x * \underset{0}{y} = 0 \wedge \underset{0}{y} * x = 0 \Rightarrow x = \underset{0}{y})$

/ /

مقالة

تمهيدية:

إذا كان A جبر BCK عندئذ $\forall x\in A\ ;\ x_* 0=x$

الإثبات:

لإثبات العلاقة سنبين أن:

. $x_*(x_*0)=0$

.. $(x_*0)_* x=0$

(عندئذ بالاعتماد على الخاصة (3) نجد أن $x_*0=x$)

- بالاعتماد على الخاصة (4):

$\forall x,y\in A\ :\ (x_*(x_*y))_* y=0$

لنفرض كحالة خاصة: $y=0$

$\big(\overbrace{x_*(x_*0)}^{v}\big)_*0=0 \qquad v_*0=0$

(حسب التمهيدية السابقة $x_*0=0 \Leftarrow x=0$)

$\boxed{x_*(x_*0)=0}$ ... (*)

- بالاعتماد على الخاصة (4).

$\forall x,y\in A\ :\ (x_*(x_*y))_*y=0$

بفرض كحالة خاصة $x=y$

$(x_*(x_*x))_*x=0$

حسب الخاصة الأولى $x_*x=0$

$\boxed{(x_*0)_*x=0}$ ... (**)

من (*) و (**) وحسب الخاصة (3) $x_*y=0\wedge y_*x=0\Rightarrow x=y$

$x_*0=x$

/ /

← تعريف: ليكن A جبر BCK، نعرف العلاقة الثنائية:

$$a \leq b \iff a * b = 0 \quad , \forall a, b \in A$$

نتيجة: إن العلاقة الثنائية هي علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية

• انعكاسية لأن: $\forall a \in A \; , \; a \leq a \iff a * a = 0$

• تخالفية لأن: $\forall a, b \in A : \; \left.\begin{matrix} a \leq b \iff a * b = 0 \\ b \leq a \iff b * a = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$

حسب الخاصة (3)

• متعدية لأن:

$$\forall a, b, c \in A ; \quad a \leq b \wedge b \leq c$$

$$\iff \quad a * b = 0 \quad \wedge \quad b * c = 0$$

$$a * c \overset{x*0=x}{=} (a * c) * 0 \overset{a*b=0}{=} (a * c) * (a * b) \overset{x*0=x}{=} ((a * c) * (a * b)) * 0$$

$$a * c = ((a * c) * (a * b)) * (b * c) \overset{\text{خاصة }(5)}{=} 0$$

$$\Rightarrow a * c = 0 \iff a \leq c$$

يمكن استناداً إلى ما مرّ أخيراً إعادة صياغة الخواص الخمس الواردة في تعريف مفهوم جبر K على النحو التالي:

$a \leq a$

$0 \leq a$

if "$a \leq b$ and $b \leq a$" imply $a = b$

$a * (a * b) \leq b$

(5) $(a * b) * (a * c) \leq (c * b)$ $\quad \forall a, b, c \in A$

Alamal

/ /

تمهيدية:
إذا كان A جبر BCK عندئذ:

(1) $a \le b \Rightarrow a*c \le b*c$ and $c*b \le c*a$

(2) $(a*b)*c = (a*c)*b$
وذلك مهما يكن a,b,c عناصر من A

الإثبات:
(1) لدينا $a \le b$ إذاً $a*b=0$
نريد إثبات أن $a*c \overset{?}{\le} b*c$.
أي $(a*c)*(b*c) \overset{?}{=} 0$
(حسب تعريف علاقة الترتيب $x \le y \Leftrightarrow x*y=0$)

$$L_1 = (a*c)*(b*c) \overset{x*0=x}{=} ((a*c)*0)*(b*c)$$

$$\underset{a*b=0}{\overset{\Leftarrow a\le b}{=}} ((a*c)*(a*b))*(b*c) \overset{\text{حسب الخاصة (5)}}{=} 0 = L_2$$

إذاً حسب تعريف علاقة الترتيب "$\le$" نجد أن $a*c \le b*c$

الآن لنثبت أن $c*b \overset{?}{\le} c*a$..
أي $(c*b)*(c*a) \overset{?}{=} 0$

$$L_1 = (c*b)*(c*a) \overset{x=x*0}{=} ((c*b)*(c*a))*0$$

(حسب الخاصة (5)) $= ((c*b)*(c*a))*(a*b) = 0 = L_2$

إذاً حسب تعريف علاقة الترتيب "$\le$" نجد أن $c*b \le c*a$

Alamal

كان أحد المشاركين في الملتقى في البيانات، إثبات هذه المبرهنة صحيحة

$(a*b)*c \overset{?}{=} (a*c)*b$ (2)

لدينا $a*(a*c) \leq c$

وذلك حسب الخاصية (4) وحسب تعريف علاقة الترتيب "$\leq$"

$(a*(a*c))*c = 0 \iff a*(a*c) \leq c$

$(a*b)*c \leq \underbrace{(a*b)}_{x}*\underbrace{(a*(a*c))}_{z}$

حسب (1) (ركبنا $a*b$ من اليسار)

$a \leq b \Rightarrow c*b \leq c*a$ $\quad (x*y)*(x*z) \leq z*y$

حسب الخاصية (5)

$\Rightarrow \boxed{(a*b)*c \leq (a*c)*b}$ ...(*)

$((x*y)*(x*z))*(z*y) \iff ((x*y)*(x*z)) \leq (z*y)$

هذه العلاقة دوماً صحيحة

بنفس الأسلوب:

$a*(a*b) \leq b$

وذلك حسب الخاصية (4) وتعريف علاقة الترتيب "$\leq$"

$a*(a*b) \leq b \iff (a*(a*b))*b = 0$

$(a*c)*b \leq \underbrace{(a*c)}_{x}*\underbrace{(a*(a*b))}_{z}$

$(x*y)*(x*z) \leq z*y$

حسب (1) (ركبنا $a*c$ من)

$\boxed{(a*c)*b \leq (a*b)*c}$ ... (**)

$((x*y)*(x*z))*(z*y) \iff ((x*y)*(x*z)) \leq (z*y)$

amal

من (*) و (**) نجد أن $(a*c)*b=(a*b)*c$

وذلك حسب الخاصية التخالفية لعلاقة الترتيب " $\leq$ "

ملاحظة: الخاصية السابقة (*) و (**) تترجم على أن

$x\leq y \wedge y\leq x \Rightarrow x=y$

نظرية:
إذا كان A جبر BCK عندئذ:

(1) $a*(a*(a*b)) = a*b$

(2) $((a*c)*(b*c))*(a*b) = 0$

وذلك مهما تكن a,b,c من A

الإثبات:

$a*(a*(a*b)) \overset{?}{=} a*b$ (1)

4) $(a*(a*b))*b=0 \Rightarrow a*(a*b) \leq b$

$\Rightarrow a*b \leq a*(a*(a*b))$ ...(1)

$\underbrace{(\overset{x}{a}*\overbrace{(a*(a*b))}^{y})}_{a*(a*b)}*\overbrace{(a*b)}^{z} = (a*(a*b))*(a*(a*b))$

$\Rightarrow a*(a*(a*b)) \leq (a*b)$ ...(2) $\overset{}{=0}$

من (1) و (2) نجد $a*(a*(a*b)) = a*b$
(حسب الخاصية التناظرية لعلاقة الترتيب "$\leq$")

(2) $((a*b)*(a*c))*(c*b)=0$ الخاصية (5)

$((a*c)*(b*c))*(a*b)=((a*c)*(a*b))*(b*c)=0$

الخاصية (5)

Alamal

/ /

جبور BCK التبادلية والضمنية:

تعريف: ليكن A جبر BCK

يقال عن A إنه تبادلي إذا تحقق $a*(a*b) = b*(b*a)$

يقال عن A إنه ضمني إذا تحقق $(a*b)*b = a*b$

وذلك مهما يكن a,b عناصر من A

مثال: لنأخذ المجموعة $(\{0,a,b,c,d\},*)$ وفق الجدول التالي:

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	b
c	c	b	a	0	b
d	d	a	d	a	0

بين فيما إذا كان $(A,0,*)$ جبر BCK تبادلي

الحل:

. من الواضح أن $x*x=0,\ \forall x\in A$ (كون عناصر القطر الرئيسي أصفار)

. من الواضح وكون جميع عناصر السطر الأول معدومة أن

$$0*x=0\ ,\ \forall x\in A$$

. هل يوجد عنصرين مختلفين في هذا الجدول تركيبها معدوم؟

الجواب: لا وبالتالي الشرط (3) محقق.

. $(x*(x*y))*y \overset{?}{=} 0 \qquad \forall x,y\in A$

$(a*\underbrace{(a*b)}_{a})*b = 0$

$\underbrace{a*a}_{0}$

$0*b=0$

$(b*\underbrace{(b*c)}_{0})*c = 0$

$b*0=b \qquad b*c=0$

$$(a * \underbrace{(a * d)}_{0}) * d = 0$$

$$a * d = 0$$

$$(b * \underbrace{(b * d)}_{b}) * d = 0$$

$$0 * d = 0$$

الشرط الرابع محقق.

$$((\underbrace{a * b}_{a}) * (\underbrace{a * c}_{0})) * (\underbrace{c * b}_{a}) = 0$$

$$\underbrace{a * 0}_{a} \quad \underbrace{a * a}_{0}$$

$$((\underbrace{b * d}_{b}) * (\underbrace{b * a}_{b})) * (\underbrace{a * d}_{0}) = 0$$

$$\underbrace{b * b}_{0} \quad \underbrace{0 * 0}_{0}$$

الشرط الخامس محقق.

نلاحظ أنه من أجل جميع عناصر الجدول فإن جميع شروط BCK محققة ومنه $(A, 0, *)$ هو جبر BCK

هل هو تبادلي؟

$$\forall x, y \in A : \; x * (x * y) \overset{?}{=} y * (y * x)$$

$$a * \underbrace{(a * b)}_{a} = b * \underbrace{(b * a)}_{b}$$

$$\underbrace{a * a}_{0} \quad \text{محققة} \quad \underbrace{b * b}_{0}$$

Alamal

$$c * \underbrace{(c * d)}_{b} = d * \underbrace{(d * c)}_{a}$$

$$\underbrace{c * b}_{a} \quad \text{محققة} \quad \underbrace{d * a}_{a}$$

$$b * \underbrace{(b * d)}_{b} = d * \underbrace{(d * b)}_{d}$$

$$\underbrace{b * b}_{0} \quad \text{محققة} \quad \underbrace{d * d}_{0}$$

فهو جبر BCK تبادلي.

هل هو جبر BCK ضمني.

$$\forall x, y \in A : (x * y) * y = x * y$$

$$\underbrace{(a * b)}_{a} * b = \underbrace{a * b}_{a} \qquad \underbrace{(a * c)}_{0} * c = \underbrace{a * c}_{0}$$

$$\underbrace{a * b}_{a} \quad \text{محققة} \quad a \qquad \underbrace{0 * c}_{0} \quad \text{محققة}$$

$$\underbrace{(c * d)}_{b} * d = \underbrace{(c * d)}_{b} \qquad \underbrace{(b * d)}_{b} * d = \underbrace{b * d}_{b}$$

$$\underbrace{b * d}_{b} \quad \text{محققة} \qquad \underbrace{b * d}_{b} \quad \text{محققة}$$

$$\underbrace{(d * a)}_{a} * a = \underbrace{d * a}_{a}$$

$$\underbrace{a * a}_{0} \neq a \quad \text{غير محققة}$$

إذاً A ليس ضمني

← A هو جبر BCK تبادلي وليس ضمني

نظرية:

إن للموضوعات الأربعة التالية كافية لتعريف جبر BCK تبادلي على بنية جبرية $(A, 0, *)$

$$1'\quad x * x = 0$$

$$2'\quad x * 0 = x$$

$$3'\quad x * (x * y) = y * (y * x)$$

$$4'\quad (x * y) * z = (x * z) * y$$

هذه الشروط تكافئ الشروط الخمسة الواردة في جبر BCK مع شرط التبادلية

الإثبات:

لنفرض أن الموضوعات $(1')$ و $(2')$ و $(3')$ و $(4')$ محققة

ولنبرهن على الموضوعات الستة الواردة في التعريف

. نلاحظ من $(1')$ أن الشرط الأول في جبر BCK محقق

. الشرط الثاني من شروط جبر BCK هو $0 * x \overset{?}{=} 0$

$$0 * x \overset{(1')}{=} (x * x) * x \overset{(2')}{=} (x * (x * \overset{y}{0})) * x$$

$x*(x*y) = y*(y*x)$

$$\overset{(3')}{=} (\overset{x}{0} * (\overset{y}{0 * x})) * \overset{z}{x}$$

$$\overset{(4')}{=} (\overset{x}{0 * x}) * (\overset{x}{0 * x})$$

$$\overset{(1')}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 0 * x = 0$$

$$\underbrace{c * \underbrace{(c*d)}_{b}}_{a} = \underbrace{d * \underbrace{(d*c)}_{a}}_{a}$$

a محققة a

$$\underbrace{b * \underbrace{(b*d)}_{b}}_{0} = \underbrace{d * \underbrace{(d*b)}_{d}}_{0}$$

0 محققة 0

فهو جبر BCK تبادلي.

هل هو جبر BCK ضمني.

$$\forall x, y \in A : (x*y)*y = x*y$$

$$\underbrace{\underbrace{(a*b)}_{a} * b}_{a} = \underbrace{a*b}_{a}$$

a محققة a

$$\underbrace{\underbrace{(a*c)}_{0} * c}_{0} = \underbrace{a*c}_{0}$$

0 محققة

$$\underbrace{\underbrace{(c*d)}_{b} * d}_{b} = \underbrace{(c*d)}_{b}$$

b محققة

$$\underbrace{\underbrace{(b*d)}_{b} * d}_{b} = \underbrace{b*d}_{b}$$

b محققة

$$\underbrace{\underbrace{(d*a)}_{a} * a}_{0} \neq \underbrace{d*a}_{a}$$

0 غير محققة

إذاً A ليس ضمني

$\Leftarrow$ A هو جبر BCK تبادلي وليس ضمني

/ /

نظرية:
إن للموضوعات الأربعة التالية كافية لتحديد جبر BCK تبادلي على بنية جبرية $(A, 0, *)$

$\boxed{1'}$ $x * x = 0$

$\boxed{2'}$ $x * 0 = x$

$\boxed{3'}$ $x * (x * y) = y * (y * x)$

$\boxed{4'}$ $(x * y) * z = (x * z) * y$

هذه الشروط تكافئ الشروط الخمسة الواردة في جبر BCK مع شرط التبادلية

الإثبات:
لنفرض أن الموضوعات $(1')$ و $(2')$ و $(3')$ و $(4')$ محققة ولنبرهن على الموضوعات الستة الواردة في التعريف.

• نلاحظ من $(1')$ أن الشرط الأول في جبر BCK محقق

• الشرط الثاني من شروط جبر BCK هو $0 * x \overset{?}{=} 0$

$$0 * x \overset{(1')}{=} (x * x) * x \overset{(2')}{=} (x * (x * \overset{y}{0})) * x$$

$x*(x*y) = y*(y*x)$

$$\overset{(3')}{=} \big(\overset{x}{0} * (\overset{y}{0 * x})\big) * \overset{z}{x}$$

$$\overset{(4')}{=} (\overset{x}{0 * x}) * (\overset{x}{0 * x})$$

$$\overset{(1')}{=} 0 \Rightarrow 0 * x = 0$$

. الشرط الثالث : $x*y=0$ ، $y*x=0 \Rightarrow x\overset{?}{=}y$

لنفرض $\begin{cases} x*y=0 \\ y*x=0 \end{cases}$ ولنبرهن أن $x=y$

$$x \overset{(2')}{=} x*0 \overset{\text{الفرض}}{=} x*(x*y)$$

$$\overset{(3')}{=} y*(y*x) \overset{\text{الفرض}}{=} y*0 \overset{(2')}{=} y \Rightarrow x=y$$

. الشرط الرابع : $(x*(x*y))*y \overset{?}{=} 0$

$$L_1=(\overset{x}{x}*(\overset{y}{x*y}))*\overset{z}{y} \overset{(4')}{=} (x*y)*(x*y) \overset{(1')}{=} 0 = L_2$$

. الشرط الخامس : $((x*y)*(x*z))*(z*y) \overset{?}{=} 0$

$$L_1=((\overset{x}{x}*\overset{y}{y})*(\overset{z}{x*z}))*(z*y)$$

$$\overset{(4')}{=}((x*(x*z))*y)*(z*y)$$

$$\overset{(3')}{=}((\underbrace{z}_{x}*\underbrace{(z*x)}_{y})*\underbrace{y}_{z})*(z*y)$$

$$\overset{(4')}{=}(\underbrace{(z*y)}_{x}*\underbrace{(z*x)}_{y})*\underbrace{(z*y)}_{z}$$

$$\overset{(4')}{=}((z*y)*(z*y))*(z*x)$$

$$\overset{(1')}{=} 0*(z*x)$$

$= 0 \rightarrow$ حسب الشرط الأول الذي أثبتناه

Alamal

/ /

شرط التبادلية محقق $(3')$

العكس: لنفرض أن A جبر BCK تبادلي ولنبرهن على صحة الشروط الأربعة الواردة

واضح

لدينا A جبر BCK تبادلي و $(1')$ صحيحة و $(2')$ صحيحة مشروطة

$(3')$ كون A تبادلي $(4')$ صحيحة (شبه)

معايير مكافئة لمفهوم جبور BCK الضمنية أو التبادلية:

نظرية: ليكن A جبر BCK

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون A ضمني هو أن تتحقق العبارة التالية:

$$(a*b)*c=(a*c)*(b*c) \Leftrightarrow \text{ضمني } A$$

الإثبات:

$\Leftarrow$ نفرض A ضمني ولنبرهن هذه الحقيقة:

$$(a*b)*c \overset{?}{\leqslant} (a*c)*(b*c) \overset{?}{\leqslant} (a*b)*c$$

وذلك بالاستفادة من كون العلاقة "$\leqslant$" تآلفية

$0=0*c=(b*b)*c=(b*c)*b \Rightarrow b*c\leqslant b$

لدينا $b*c\leqslant b$ لأن $(b*c)*b=0$

(نركب من اليسار $(a*c)$)

$a\leqslant b \Rightarrow c*b\leqslant c*a$

(مبرهنة)

$$(\underset{x}{a}*\underset{y}{c})*\underset{z}{b} \leqslant (a*c)*(b*c)$$

$\leftarrow (4')$

Alamal

$$\Rightarrow \boxed{(a*b)*c \leq (a*c)*(b*c)} \quad \dots (1)$$

من جهة أخرى لنبرهن: $(a*c)*(b*c) \leq (a*b)*c$

في الواقع لدينا:

$$(a*c)*(b*c) \leq a*b$$

وذلك حسب:

$$((a*c)*(b*c))*(a*b)=0 \quad \text{(نظرية سابقة)}$$

(نركب c من اليمين)

$$(\overbrace{(a*c)}^{x} * \overbrace{(b*c)}^{y})*\overbrace{c}^{z} \leq (a*b)*c$$

$(x*y)*z = (x*z)*y$

$$(\underbrace{(a*c)*c}_{a*c \text{ كون } A \text{ ضمني}})*(b*c) \leq (a*b)*c$$

وبما أن A ضمني فإن المتراجحة الأخيرة تعطي

$$\boxed{(a*c)*(b*c) \leq (a*b)*c} \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد المساواة

$$a*(b*c) = (a*c)*(b*c)$$

(بالاستفادة من كون "$\leq$" تخالفية)

$\Leftarrow$ لدينا من الفرض: $(a*b)*c = (a*c)*(b*c) \;, \forall a,b,c \in A$

ولنبرهن أن A ضمني

لنضع كحالة خاصة $c=b$

نجد

$$(a*b)*b = (a*b)*\underbrace{(b*b)}_{0}$$

$$= (a*b)*0 = a*b \quad ✓$$

وهو شرط الضمني

Alamal

/ /

نظرية: (يمكن دمج التبادلي والضمني بشرط واحد)
لتكن A جبر BCK عندئذ
A تبادلي وضمني إذا وفقط إذا تحققت العلاقة:

$$\forall a,b\in A:\quad a*(b*a)=a \iff \text{تبادلي وضمني } A$$

الإثبات:
$\Leftarrow$ لنفرض أن A جبر BCK تبادلي وضمني
من جهة أولى لدينا:

$$(\overbrace{a}^{x}*\overbrace{(b*a)}^{y})*\overbrace{a}^{z}=(\overbrace{a}^{x}*\overbrace{a}^{z})*(b*a)$$

$$=0*(b*a)$$

$$=0$$

$$\Rightarrow (a*(b*a))*a=0 \qquad (1)$$

من جهة أخرى:

$$\overbrace{a}^{x}*(\overbrace{a}^{x}*\overbrace{(b*a)}^{y})=\overbrace{(b*a)}^{y}*(\overbrace{(b*a)}^{y}*a)$$

كون A تبادلي $x*(x*y)=y*(y*x)$

ضمني A $=(b*a)*(b*a)$

$$(b*a)*a=b*a$$

$$=0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد المساواة $a*(b*a)=a$

$$(x*y=0\wedge y*x=0\Rightarrow x=y)$$

لنفرض تحقق المساواة $a*(b*a)=a$

ولنبرهن أن A تبادلي وضمني:

. أولاً: الصفة التبادلية:

$$a*(a*b) = (\overset{x}{a}*\overset{y}{(b*a)})*(\overset{x}{a}*\overset{z}{b}) \quad ?$$

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$$

الخاصة (5)

$$\Leftrightarrow \quad (x*y)*(x*z) \leq (z*y)$$

$$\leq \underset{z}{b}*\underset{y}{(b*a)}$$

من جهة أخرى نجد

$$b*(b*a) = (\overset{x}{b}*\overset{y}{(a*b)})*(\overset{z}{b}*a)$$

$$\leq a*(a*b)$$

من المتراجحتين نحصل على أن A تبادلي

. ثانياً: صفة الضمني:

لدينا: $a*(b*a)=a$ (حسب الفرض)

$$(a*b)*b \overset{?}{=} a*b$$

$$\underset{x}{(a*b)}*(\underset{y}{b}*\underset{x}{(a*b)})$$

$(a*b)*b = (a*(b*(a*b)))*b$

$= (a*b)*(b*(a*b)) = a*b$

Alamal

/ /

نظرية:

$$A \text{ تبادلي} \iff \begin{cases} (1)\ a*(0*b) = a \\ (2)\ (a*b)*(a*c) = (c*b)*(c*a) \end{cases}$$

الإثبات:

$\Rightarrow$ لنفرض A جبر BCK تبادلي ~~...~~

$\cdot\ a*(0*b) = a*0 = a$

$\cdot\ (\overset{x}{a}*\overset{y}{b})*\overset{z}{(a*c)} = (a*(a*c))*b$

$= (\overset{x}{c}*\overset{y}{(c*a)})*\overset{z}{b}$

$= (c*b)*(c*a)$

$\Leftarrow$ لنفرض أن (1) و (2) محققة ولنثبت أن A جبر BCK تبادلي

نلاحظ من $a*(0*b) = a$ أنه من أجل $a=0$

$0*(0*a) = 0$

$a*0 = a*(0*\overset{b}{(0*a)}) \overset{(1)}{=} a$

$a*a \overset{(2)}{=} (a*0)*(a*0) = (0*0)*(0*a) = 0$

$a*(a*b) = (a*0)*(a*b) \overset{(2)}{=} (\underbrace{b*0}_{b})*(b*a)$

$\overset{(1)}{=} b*(b*a)$

$0*a = (a*a)*a = (a*a)*(a*0) \overset{(2)}{=} (0*a)*(0*a) \overset{(2)}{=} 0$

Alamal

5.) $\left.\begin{array}{l} b*a=0 \\ a*b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = a*0 = a*(a*b) = b*(b*a)$

$= b*0 = b$

6.) $(a*(a*b))*b = (b*(b*a))*b$

$= (\overset{x}{b}*\overset{y}{(b*a)})*(\overset{z}{b}*\cancel{0})$

$= \cancel{b*b}\ (b*b)*(b*a) = 0*(\overset{x}{b*a}) = 0$

7.) $((a*b)*(a*c))*(c*b)$

$\overset{(2)}{=} ((c*b)*(c*a))*(c*b)$

$= ((c*b)*(c*b))*(c*a)$

$= 0*(c*a) = 0$

نظرية: اذا كان A جبر BCK تبادلي :

$\forall a,b,c \in A;\ \left.\begin{array}{l} a\le c \\ b\le c \end{array}\right)$

$c*a = c*b \Rightarrow a=b$

$\left.\begin{array}{l} a\le c \Rightarrow a*c=0 \\ b\le c \Rightarrow b*c=0 \\ c*a=c*b \end{array}\right\}$ $a = a*0 = a*(a*c) = c*(c*a)$

$= c*(c*b) = b*(b*c)$

$= b*0 = b$

Alamal

نظرية: إن الموضوعات التالية

1) $a * a = 0$

2) $a * (b * a) = a$

3) $(a * c) * (a * b) = (b * c) * (b * a)$

لازمة وكافية لتحديد جبر BCK تبادلي وضمني

الإثبات:

نفرض صحة الموضوعات الثلاث

- $a * a = 0$ ✓
- $a * 0 = a * (a * a) = a$
- $0 * a = 0 * (a * 0) = 0$
- $\left.\begin{array}{l} a * b = 0 \\ b * a = 0 \end{array}\right) \Rightarrow a = a * 0 = \underline{a * (a * b)} = (a * 0) * (a * b)$

$= (b * 0) * (b * a) = \underline{b * (b * a)} = b * 0 = b$

$(a * (a * b)) * b = (b * (b * a)) * b$

$= (b * b) * (b * a) = 0 * (b * a) = 0$

$((a * b) * (a * c)) * (c * b) = ((c * b) * (c * a)) * (c * b)$

$= ((c * b) * (c * b)) * (c * a) = 0 * (c * a) = 0$

جبور BCK والخاصية S:

← لتكن A جبر BCK ولنعرف العملية الثنائية "$\wedge$" كمايلي

$$a \wedge b = a * (a * b) \quad , \forall a, b \in A$$

نظرية:
لتكن A جبر BCK عندئذ:

1) $a \wedge a = a$

2) $a * (a \wedge b) = a * b$

3) $(a \wedge b) * a = (a \wedge b) * b = 0$

الإثبات:

1) $a \wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$

2) $a * (a * (a * b)) = a * b$ (حسب نظرية سابقة)
$a * (a \wedge b)$

3) $(a \wedge b) * a = (a * (a * b)) * a = (a * a) * (a * b)$

$= 0 * (a * b) = 0$

$(a \wedge b) * b = (a * (a * b)) * b = (a * b) * (a * b) = 0$

/ /

تعريف: ليكن A جبر BCK
يقال عن A إنه يحقق الخاصية S إذا تحقق ما يلي:

$$(a*b)\wedge(b*a)=0 \quad , \forall a,b\in A$$

نتيجة:
كل جبر BCK تبادلي وضمني يحقق الخاصية S

الإثبات:

$$(a*b)\wedge(b*a) = (a*b)*((a*b)*(b*a))$$

$$=(a*b)*(\underbrace{(a*(b*a))}_{a}*b)$$

كون A تبادلي وضمني (حسب مبرهنة سابقة)

/ /

المثاليات في جبر BCK:

تعريف: ليكن A جبر BCK. إن المثالي لـ A هو مجموعة جزئية غير خالية I من A تحقق:

1) $0 \in I$ (I يحوي العنصر الصفري)

2) $a * b \in I$ and $b \in I \Rightarrow a \in I$

($a * b \in I$ والعنصر الواقع على اليمين ينتمي لـ I فإن العنصر اليساري ينتمي لـ I)

* نتيجة على الفور أن $\{0\}$ مثالي في A يدعى المثالي الصفري
* يوجد مثاليين دوماً هما $\{0\}$ و A.

نظرية:
ليكن A جبر BCK وليكن I مثالي في هذا الجبر عندئذ:

1) $a \in I \Rightarrow a * b \in I \quad ; \forall b \in A$

($a \in I$ وشكلنا معه عنصر من A من اليمين سوف ينتمي أيضاً للمثالي)

2) $a \in I$ or $b \in I \Rightarrow a \wedge b \in I$

الإثبات:

1) $(a * b) * a = 0 \in I \quad \forall a, b \in A$

وبما أن $a \in I$ فرضاً فإن $a * b \in I$ (حسب تعريف المثالي)

2) نعلم أن $(a \wedge b) * a = 0 \in I$

$(a \wedge b) * b = 0 \in I$

لما $a \in I$ فرضاً $\Leftarrow a \wedge b \in I$

أو $b \in I$ فرضاً $\Leftarrow a \wedge b \in I$

Ideal مثالي
Ideaux مثاليات

/ /

مفاهيم أساسية:

← لتكن A جبر BCK ، سنرمز لمجموعة المثاليات في A بالرمز $Id(A)$
يلاحظ على الفور وجود مثاليين على الأقل هما المثالي الصفري والجبر A
$\{0\}, A \in Id(A)$

← لتكن $a \in A$ ولتكن المجموعة
$>a< = \{x \in A \,;\, x * a = 0\}$
(المجموعة المولدة لـ a)
إن هذه المجموعة ليست مثالي في الحالة العامة (ما لم نتخذ شروط إضافية)

نظرية:
إذا كان A جبر BCK تبادلي عندئذ:

1) $a \leq b \iff >a< \subseteq >b<$

2) $>a \wedge b< = >a< \cap >b<$

الإثبات:
1) $\Rightarrow$ $\boxed{a \leq b} \iff a * b = 0$
لتكن $x \in >a<$ عندئذ حسب تعريف $>a<$
فإن $x * a = 0 \iff \boxed{x \leq a}$ (حسب تعريف "$\leq$")

وكون "$\leq$" علاقة ترتيب (فهي متعدية) وبالتالي $\boxed{x \leq b}$
وهذا يكافئ $x * b = 0$ إذاً $x \in >b<$
الاحتواء ~~محقق~~ محقق. $>a< \subseteq >b<$

/ /

لدينا $\rangle b \langle \subseteq \rangle a \langle$ ولنثبت أن $a \leq b$

$a \in \rangle a \langle \subseteq \rangle b \langle$

فرضاً

لأن $a * a = 0 \Leftarrow a \in \rangle a \langle$

$\rangle a \langle \subseteq \rangle b \langle$ حسب الفرض $\Leftarrow a \in \rangle b \langle$

$\Leftarrow a * b = 0$ (حسب تعريف $\rangle b \langle$)

$\Leftarrow a \leq b$ (حسب تعريف علاقة الترتيب "$\leq$")

(2 $(a \wedge b) * a = 0 \Leftarrow a \wedge b \leq a$

$(a \wedge b) * b = 0 \Leftarrow a \wedge b \leq b$

$$\left.\begin{array}{l} \rangle a \wedge b \langle \subseteq \rangle a \langle \\ \rangle a \wedge b \langle \subseteq \rangle b \langle \end{array}\right\} \Rightarrow \rangle a \wedge b \langle \subseteq \rangle a \langle \cap \rangle b \langle$$

الاحتواء الثاني: ليكن $x \in \rangle a \langle \cap \rangle b \langle$ عندئذ

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \rangle a \langle \Rightarrow x * a = 0 \\ x \in \rangle b \langle \Rightarrow x * b = 0 \end{array}\right.$$

نريد أن نبرهن أن $x \in \rangle a \wedge b \langle$

أي $x * (a \wedge b) \overset{?}{=} 0$

$x * (a \wedge b) = x * (a * (a * b))$

نلاحظ أن: $x = x * 0$

$x * a = 0 = x * (x * a)$

تبادلي $A = a * (a * x)$

/ /

$$x * (a \wedge b) = x * (a * (a * b))$$

$$= (x * 0) * (a * (a * b))$$

$$\cancel{= (x * (a * b}$$

$$= (x * (x * a)) * (a * (a * b))$$

$$= (\underset{x}{a} * (\underset{y}{a * x})) * (\underset{z}{a * (a * b)})$$

$$= \underbrace{a * (a * (a * b))}_{a * b} * (a * x)$$

حسب نظرية سابقة

$$= (\underset{x}{a} * \underset{y}{b}) * (\underset{z}{a * x})$$

$$= (\underbrace{a * (a * x)}) * b \qquad\qquad a * (a * x) = x * (x * a)$$

A تبادلية

$$= x * b \qquad\qquad = x * 0$$

$$= 0 \qquad\qquad = x$$

$$\Rightarrow x * (a \wedge b) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \, > a \wedge b <$$

$$\Rightarrow \; >a< \cap >b< \; \subset \; >a \wedge b<$$

من الاحتوائين السابقين نجد أن $>a< \cap >b< = >a \wedge b<$

المحاضرة 16 4/12/2017

نظرية:

لتكن A جبر BCK موجبي عندئذ:

المجموعة $>a< = \{x \in A ; x * a = 0\}$

تشكل مثالي في A مولداً بالعنصر a.

الإثبات:

نلاحظ وضوحاً أن $0 \in >a<$ وذلك لأن $0 * a = 0$
$\forall a \in A$

من جهة أخرى: لتكن $x * y \in >a<$ و $y \in >a< \Leftarrow y * a = 0$

ولنثبت أن $x \in >a<$

أي لنبرهن أن $x * a = 0$

لدينا: $y * a = 0 \wedge (x * y) * a = 0$

$$\overset{\text{موجبي } A}{\Longrightarrow} (x * a) * (y * a) = 0 \wedge y * a = 0$$

$$x * 0 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x * a = 0$$
$$\Rightarrow x \in >a<$$

إذاً $>a<$ مثالي

لنبرهن أنه مولد بـ a:

لأن $(a * a = 0)$ $a \in >a<$

ولنبرهن أنه أصغر مثالي يحوي a

لنفرض وجود مثالي ما J يحوي a ولنبرهن أن $>a< \subseteq J$

$z \in >a< \Rightarrow z * a = 0 \in J$ (الصفر ينتمي لأي مثالي)

ولدينا فرضاً J مثالي يحوي a

$z \in J \Rightarrow >a< \subseteq J$

وهو المطلوب

Alamal

/ /

ملاحظات:

1) ندعو المثالي المولد بالعنصر a بالمثالي الرئيسي المولد بالعنصر a.

2) المثالي الصفري هو مثالي رئيسي مولد بالصفر

3) يمكن أن نبين بسهولة $>b<=0 \Leftrightarrow b=0$

نظرية:

هامة كل سنة بتأتي بالدورات

إذا كان I و J مثاليان في جبر BCK تبادلي عندئذ:

$$I.J = \{a\wedge b \; ; \; a\in I \; , \; b\in J\}$$

تشكل مثالي لـ A

وزد على ذلك أن: $I.J = I\cap J$

الإثبات:

سنبرهن قبل كل شيء أن $I.J\subseteq I\cap J$, $I\cap J\subseteq I.J$

ليكن $x\in I.J$ عندئذ $x = a\wedge b \; ; \; a\in I, b\in J$

$$x = a\wedge b = \underbrace{a}_{\in I} * (a*b) \in I$$

حسب مبرهنة سابقة

$a\in I \Rightarrow a*x\in I \; , \; \forall x\in A$ (تركيب $a\in I$ مع أي عنصر من الجبر $\in I$)

$$\Rightarrow x\in I$$

$$x = a\wedge b \overset{\text{تبادلي } A}{=} \underbrace{b}_{\in J} * (b*a) \in J$$

$$\Rightarrow x\in J$$

Alamal

$\Rightarrow x \in I \cap J \quad \Rightarrow \boxed{I.J \subset I \cap J}$

الاحتواء الثاني: $x \in I \cap J \Rightarrow x \in I \; , \; x \in J$

$x \in I \Rightarrow x = \underset{I}{x} \wedge \underset{J}{x} \in I.J \quad \Rightarrow \boxed{I \cap J \subset I.J}$

من الاحتوائين نجد أن $I \cap J = I.J$

لنثبت أن هذه المجموعة تشكل مثالي:

. $\underset{I}{0} \wedge \underset{J}{0} = 0 \Rightarrow 0 \in I.J$

. $x * y \in I.J \; , \; y \in I.J \overset{?}{\Rightarrow} x \overset{?}{\in} I.J$

نعلم أن $I.J = I \cap J \Rightarrow y \in I \cap J \; , \; x * y \in I \cap J$

$x * y \in I \; ; \; y \in I$
$x * y \in J \; ; \; y \in J$ $\Big) \xrightarrow[\text{مثاليين}]{I, J}$ $x \in I$, $x \in J$

$\Rightarrow x = \underset{I}{x} \wedge \underset{J}{x} \in I.J$

ومنه $I.J$ مثالي في A

نظرية:

لتكن A جبر BCK ضمني و I مثالي في A فإن المجموعة

$$I(a) = \{ x \in A \; ; \; x * a \in I \}$$

تكون مثالياً مولداً بالمثالي I وبالعنصر a.

البرهان:

/ /

$0 \in I(a) \Leftarrow 0 * a \in I \quad , a \in A$

$$\left.\begin{array}{l} x*y \in I(a) \\ y \in I(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (x*y)*a \in I \\ y*a \in I \end{array}$$

ولكن A ضمني

$(x*a)*(y*a) \in I$

$y*a \in I$

$\Rightarrow x*a \in I \quad , x \in I(a) \Rightarrow$ $I(a)$ مثالي في A

لنبرهن أن المثالي يحوي I ويحوي a

لنبرهن أن $I \subseteq I(a)$ ، ليكن $x \in I$

نعلم أن

$(x*a)*x = 0 \in I \Rightarrow x*a \in I$

$I \Rightarrow (x*x)*a = 0*a = 0$

$\Rightarrow x \in I(a) \Rightarrow I \subseteq I(a)$

من جهة أخرى من الواضح أن $a \in I(a)$ لأن $a*a = 0 \in I$

لنفرض أن J مثالي يحوي كل من I و a ولنبرهن أن $I(a) \subseteq J$

$z \in I(a) \Rightarrow z*a \in \overbrace{I \subseteq J}^{\text{فرضاً}}$

$\Rightarrow z \in J$

$\Rightarrow I(a) \subseteq J$

إذاً $I(a)$ هو أصغر مثالي في A يحوي كلاً من I , $a \in A$

أي أن $I(a)$ مثالي مولد بـ I وبالعنصر $a \in I$

/ /

- تعريف: لكن A جبر BCK. يقال عن جبر إنه بسيط إذا لم يحو مثالياً حقيقياً (سوى المثالي الصفري)

ويقال عن مثالي J في جبر BCK إنه حقيقي إذا كان $A \neq J \neq \{0\}$

التشاكلات وجبر الخارج لـ BCK:

- تعريف: لكن A, A' جبري BCK، يقال عن التطبيق $f: A \to A'$ إنه تشاكل إذا حقق ما يلي:

$$f(x*y) = f(x) * f(y) \quad , \forall x, y \in A$$

استنتاج: كحالة خاصة:

$$f(0) = f(x*x) = f(x) * f(x) = 0' \in A'$$

$$\Rightarrow f(0) = 0'$$

أي أن f ينقل العنصر المميز 0 في A إلى العنصر المميز $0'$ في A'

كما أن:

$$x \leq y \Rightarrow x*y = 0 \Rightarrow f(x*y) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) * f(y) = 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$\Rightarrow \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- نواة التشاكل f $\ker f = \{x \in A \,;\, f(x) = 0\}$ هي مثالي في A

$$f(0) = 0' \Rightarrow 0 \in \ker f$$

$$\left.\begin{matrix} x*y \in \ker f \\ y \in \ker f \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow f(x*y) = 0 \\ \Rightarrow f(y) = 0 \end{matrix} \left.\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)*f(y) = 0 \\ f(x)*0 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f$$

Alamal

/ /

مفهوم جبر الخارج لـ BCK :

← تعريف : لتكن A جبر BCK ولتكن I مثالي لهذا الجبر نعرف على A العلاقة الثنائية :

$$a \equiv b \bmod I \Leftrightarrow a * b \in I \text{ و } b * a \in I$$

إن العلاقة السابقة تحقق ما يلي

* انعكاسية : لأن

$$a \equiv a \bmod I \Leftrightarrow a * a = 0 \in I$$

* تناظرية : لأن

$$a \equiv b \bmod I \Leftrightarrow a * b , b * a \in I$$

$$\Leftrightarrow b \equiv a \bmod I$$

* متعدية : لأن

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \bmod I \\ b \equiv c \bmod I \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow a * b \in I , b * a \in I \\ \Rightarrow b * c \in I , c * b \in I \end{array}$$

لنبرهن أن $a \equiv c \bmod I$ أي لنبرهن $a * c \in I , c * a \in I$

وفقاً لمفهوم جبر BCK والخاصة الأخيرة :

$$((\underbrace{a * c}_{\in I}) * (\underbrace{a * b}_{\in I})) * (\underbrace{b * c}_{\in I}) = 0 \in I$$

حسب الفرض $b * c \in I$ إذاً (الطرف الأيسر ينتمي لـ I)

$$(a * c) * (a * b) \in I$$

ومن الفرض $a*b \in I$ إذاً $\boxed{a*c \in I}$

وأيضاً بأسلوب مشابه

$$((c*a) * (c*b)) * (b*a) = 0 \in I$$

$$b*a \in I \Rightarrow (c*a) * (c*b) \in I$$

$$c*b \in I \Rightarrow \boxed{c*a \in I}$$

مما سبق نستنتج أن العلاقة المذكورة هي علاقة تكافؤ

نظرية:

إذا كانت A جبر BCK و I مثالي لـ A عندئذ $\bmod I$ هي علاقة تطابق

البرهان:

لنثبت أن علاقة التكافؤ $\bmod I$ معرفة جيداً (منسجمة مع البنية)

نفرض أن

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \bmod I \\ b \equiv b' \bmod I \end{array}\right) \overset{?}{\Rightarrow} a*b \equiv a'*b' \bmod I$$

لدينا من الفرض:

$$a*a' \in I \quad , \quad a'*a \in I$$
$$b*b' \in I \quad , \quad b'*b \in I$$

سنبرهن أن:

$$a*b \equiv \underbrace{a'*b'}_{x} \bmod I$$

يلاحظ مايلي:

$$\overset{\text{خاصة } (5)}{\left((a*b) * (a'*b')\right)} * \underbrace{(b'*b)}_{\in I \text{ فرضاً}} \overset{(5)}{=} 0 \in I$$

$$\Rightarrow (a*b) * (a'*b') \in I \quad \dots (1)$$

Alamal

/ /

بأسلوب مشابه:

$$((a*b')*(a*b))*\underbrace{(b*b')}_{\in I \text{ فرضاً}}=0\in I$$

$$\Rightarrow (a*b')*(a*b)\in I \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $a*b \equiv \underbrace{a*b'}_{x} \bmod I$

بأسلوب مشابه تماماً نستطيع إثبات $a*b' \equiv a'*b' \bmod I$

يتضح من ذلك وكون $\bmod I$ هي علاقة متعدية

$$\Rightarrow a*b \equiv a'*b' \bmod I$$

$\Leftarrow \bmod I$ منسجمة مع بنية العلاقة المذكورة سابقاً هي علاقة تكافؤ.

اصطلاح: إذا كان A جبر BCK سنرمز لمجموعة علاقات التطابق على A بالرمز $Cong(A)$ Congruence de (A)

نظرية:

إذا كان A جبر BCK و R علاقة تطابق على A عندئذٍ المجموعة:

$$I_R=\{x\in A : x\equiv 0\ (R)\}$$

تكون مثالياً في A (x تطابق 0) $xR0$

الإثبات:

من الواضح أن $0\in A : 0\equiv 0\ (R)$

$$\Rightarrow 0\in I_R$$

R تطابق (فهي انعكاسية)

$$y,\ x*y\in I_R \xRightarrow{\text{فرضاً}} x*y\equiv 0\ (R)$$

$$y\equiv 0\ (R)$$

Alamal

تقابل $(f): A \to B$
تقابل $(g): B \to A$
$f \circ g = id_B \quad g \circ f = id_A$

لنبرهن أن $x \in I_R$ أي $x \equiv 0 \ (R)$

نعلم أن $x \equiv x \ (R) \ ; \ \forall x \in A$ (كونها انعكاسية)

ومنه باستخدام كون R علاقة تطابق:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x \ (R) \\ y \equiv 0 \ (R) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x * y \equiv x \ (R) \\ x * y \equiv 0 \ (R) \end{array}$$

كونها علاقة متعدية وتناظرية $\Rightarrow x \equiv 0 \ (R)$

$\Leftarrow x \in I_R$ أي I_R مثالي لـ A

$x * y \in I_R$
$y \in I_R$

$$\left.\begin{array}{l} \because y \in I_R \Rightarrow y \equiv 0 \ (R) \Rightarrow x * y \equiv x * 0 \Rightarrow x * y \equiv x \ (R) \\ \because x * y \in I_R \Rightarrow x * y \equiv 0 \ (R) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x \equiv 0 \ (R) \Rightarrow x \in I_R$$

المحاضرة 17 10/12/2017

نظرية:

إذا كان A جبر BCK و R علاقة تطابق على A فإن المجموعة

$$I_R = \{x \in A;\ x \equiv (0)\ R\}$$

تكون مثالياً لـ A

$x \in A:\ x \underset{R}{\sim} 0$

$0 \in I_R \quad , 0 \in A$

$x * y\ ,\ y \in I_R \qquad 0 \underset{R}{\sim} 0$

$x * y \underset{R}{\sim} 0 \quad ,\ y \underset{R}{\sim} 0 \quad \Rightarrow y \underset{R}{\sim} x \qquad x \underset{R}{\sim} x$

مبرهنة:

إذا كان A جبر BCK تبادلي فيوجد تقابل بين مجموعة المثاليات في A ومجموعة علاقات التطابق على A

البرهان:

$Id(A) \longleftrightarrow$ مجموعة المثاليات في A

$Cong(A) \longrightarrow$ مجموعة علاقات التطابق

يجب أن نبرهن على وجود تطبيق $f: Id(A) \longrightarrow Cong(A)$ بحيث يكون هذا التطبيق تقابل

ليكن J مثالي في A عندئذ $mod J$ يكون علاقة تطابق على A (حسب نظرية سابقة)

وبالتالي يمكن تعريف التطبيق كما يلي:

$$mod: Id(A) \longrightarrow Cong(A)$$
$$J \longmapsto mod J$$

من جهة أخرى: إذا كانت R_o علاقة تطابق على A فإن I_R يكون مثالياً في A وبالتالي يمكن بناء التطبيق I_{mod_J} بشكل تناظري

$$g: Cong(A) \longrightarrow Id(A)$$
$$R_o \longrightarrow I_{R_o}$$

كما يلي:

يكفي لإتمام المطلوب أن نبرهن أن: (1) $(g\circ f)(J) = J$ ... (1)

$(f\circ g)(R_o) = R_o$ ... (2)

بتعبير آخر سنبرهن $g(f(J)) = J \Rightarrow g(\mathrm{mod}\,J) = g$

$$\Rightarrow I_{\mathrm{mod}\,J} \overset{?}{=} J \quad (1)'$$

$$(f\circ g)(R_o) = R_o \Rightarrow \mathrm{mod}(I_{R_o}) \overset{?}{=} R_o \quad (2)'$$

$J = I_{\mathrm{mod}\,J}$

$x \in J \Leftrightarrow x * 0 \in J,\ 0 * x \in J$

$\Leftrightarrow x \equiv 0 \,\mathrm{mod}\, J$

$\Leftrightarrow x \in I_{\mathrm{mod}\,J}$ $\qquad x \underset{R_o}{\sim} 0 \Leftrightarrow x \in I_{R_o}$

علاقة تطابقية $R \Leftarrow^{\text{Ass}}$ مثالي في $A \Leftarrow I_R$ علاقة تطابقية على A $\mathrm{mod}\, I_R$

$x \equiv y\,(R_o) \Rightarrow x * y \equiv 0\,(R_o)$ and $y * x \equiv 0\,(R_o)$

$y \equiv y$

$\Rightarrow x * y \in I_{R_o}$ and $y * x \in I_{R_o}$

$\Rightarrow x \equiv y \,\mathrm{mod}(I_{R_o})$

/ /

$$x \equiv y \bmod (I_{R_0}) \Rightarrow x * y \in I_R \text{ and } y * x \in I_R$$

$y \equiv y (R_0)$

$$\Rightarrow x * y \equiv 0 (R_0) \text{ and } y * x \equiv 0 (R_0)$$

$x \equiv x (R_0)$

$$\Rightarrow x * (x * y) \equiv x (R_0)$$

$$y * (y * x) \equiv y (R_0) \Rightarrow x * (x * y) \equiv y (R_0)$$

كون A جبر BCK تبادلي و R_0 تناظرية ومتعدية ينتج من ذلك $x \equiv y (R_0)$

وهو المطلوب

يتضح مما سبق أن التطبيق $mod : Id(A) \to cong(A)$ والذي يربط كل مثالي J في A بعلاقة التطابق $mod\ J$ يكون تقابل بين المجموعتين وبالتالي تم المطلوب

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "f"] & mod J \arrow[r, "g"] & I_{mod J} \arrow[ll, bend left, "\text{برهنا}"] \end{tikzcd}$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$R_0 \xrightarrow{g} I_{R_0} \xrightarrow{f} mod(I_{R_0})$$

$$(f \circ g)(z) = z$$

$$f : Id(A) \xrightarrow{f} Cong(A) \xrightarrow{g} Id(A) \qquad (g \circ f)(J) = J$$

$$(f \circ g)(R_0) = R_0$$

Alamal

تعريف: ليكن A جبر BCK وليكن I مثالي في A
نرمز لصف تكافؤ العنصر $x\in A$ بالرمز C_x

$$C_x = \{z\in A : z = x \bmod I\}$$

نتضح أن $C_0 = I$ وذلك بملاحظة أن

$$x\in I \Leftrightarrow x*0\in I \text{ and } 0*x\in I$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \bmod I \Leftrightarrow x\in C_0$$

إن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة لـ A ويرمز لها بـ A/I

$$A/I = \{C_x \;; x\in A\}$$

ولنزود هذه المجموعة بعملية ثنائية $(\bullet)$ معرفة كمايلي:

$$C_x \bullet C_y = C_{x*y} \quad ; x,y\in A$$

صف تكافؤ $x*y$

نظرية:

إن $(A/I, C_0, \bullet)$ تشكل جبر BCK.

البرهان:

1) $C_x \bullet C_x = C_{x*x} = C_0$

2) $C_0 \bullet C_x = C_{0*x} = C_0$

3) $C_x \bullet C_y = C_0 \;,\; C_y \bullet C_x = C_0 \Rightarrow C_{x*y} = C_0 \;,\; C_{y*x} = C_0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x*y = 0 \bmod I \\ y*x = 0 \bmod I \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x*y\in I \\ y*x\in I \end{array}$$

/ /

$x = y \bmod I \Rightarrow C_x = C_y$

4) $(C_x \cdot (C_x \cdot C_y)) \cdot C_y \overset{?}{=} C_0$

$\mathcal{L}_1 = (C_x \cdot C_{x*y}) \cdot C_y = C_{(x*(x*y))*y} = C_0 = \mathcal{L}_2$

حسب جبر BCK

5) $((C_x \cdot C_y) \cdot (C_x \cdot C_z)) \cdot (C_z \cdot C_y) \overset{?}{=} C_0$

$\mathcal{L}_1 = (C_{x*y} \cdot C_{x*z}) \cdot (C_{z*y})$

$= C_{(x*y)*(x*z)} \cdot C_{z*y}$

$= C_{((x*y)*(x*z))*(z*y)} = C_0$

كون A جبر BCK

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 15

المحاضرة 18 — 11 / 12 / 2017

ملاحظة:

٣) إذا كان A تبادلي فإن $A/_I$ تبادلي أيضاً

البرهان:

ليكن A جبر BCK تبادلي عندئذ:

$$C_x \cdot (C_x \cdot C_y) = C_x \cdot C_{x*y} = C_{x*(x*y)}$$

جبر BCK تبادلي A

$$x*(x*y) = y*(y*x) = C_{y*(y*x)} = C_y \cdot C_{y*x} = C_y \cdot (C_y \cdot C_x)$$

المثاليات الأولية على 50% من علامة BCK

المثاليات الأولية في جبور BCK:

من المحاضرة 18 - ... مثال على ... 15

← تعريف: ليكن A جبر BCK و I مثالي حقيقي في جبر BCK A، يقال عن I إنه مثالي أولي في جبر BCK إذا كان $I \neq A$ (أي مثالي حقيقي) والأجل أي عنصرين $a, b \in A$ يتحقق الاقتضاء التالي

$$a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I \text{ or } b \in I$$

I مثالي أولي: . $I \neq A$

.. $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ or $b \in I$

نتيجة: إذا كان I مثالياً أولياً في A فعندئذ:

$$a \wedge b \in I \Leftrightarrow a \in I \text{ or } b \in I$$

$\Rightarrow$ من التعريف (I مثالي أولي)

$\Leftarrow$ إذا كان $a \in I$ or $b \in I$

$(a \wedge b) * a = 0$ $\quad$ $(a \wedge b) * b = 0$

$\left.\begin{matrix} a \in I \\ I \text{ مثالي} \end{matrix}\right) \Rightarrow a \wedge b \in I$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} b \in I \\ I \text{ مثالي} \end{matrix}\right) \Rightarrow a \wedge b \in I$

هذا الاقتضاء صحيح دوماً سواء كان I مثالي أولي أو مثالي

المثالي الحقيقي هو مثالي لا يساوي كامل A

/ /

ملاحظة: إن المثالي الصفري $\{0\}$ ليس بالضرورة أن يكون أولي (إنما كان وحيد يمكن أن يكون أولي)

مبرهنة:

إذا كان A جبر BCK تبادلي وضمني ولكن $I \neq A$ مثالي في A

عندئذٍ:

I مثالي أولي $\Leftrightarrow$ $a*b \in I$ or $b*a \in I$

وذلك مهما يكن $a,b \in A$

البرهان:

$\boxed{\Leftarrow}$ لنفرض أن I أولي

$$(a*b) \wedge (b*a) = 0 \in I$$

وذلك لأجل أي عنصرين a,b من A

وبالتالي وفقاً للفرض يكون

$$a*b \in I \text{ or } b*a \in I$$

كل جبر BCK تبادلي وضمني يحقق S

$$S: (a*b) \wedge (b*a) = 0 \in I$$

$$(a*b) * ((a*b)*(b*a))$$

$$= (a*b) * (\underbrace{(a*(b*a))}_{a} * b)$$

$$= (a*b)*(a*b)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ لنفرض أن $I \neq A$ مثالي في A يحقق الشرط المذكور ولنبرهن أن I أولي

$$a*b \in I \text{ or } b*a \in I$$

ليكن $a \wedge b \in I$ ولنناقش الحالتين:

* الحالة (1): إذا كان $a*b \in I$

وباعتبار $a*(a*b) = a \wedge b \in I$ $\Leftarrow$ $\underline{\underline{a \in I}}$ (حسب تعريف المثالي)

أو

* الحالة (2): إذا كان $b*a \in I$ (A تبادلي)

وباعتبار $b*(b*a) = a \wedge b \in I$ $\Leftarrow$ $\underline{\underline{b \in I}}$

أو

إذاً $a \in I$ or $b \in I$ $\Leftarrow$ I أولي

Alamal

/ /

نتيجة (1):

إذا كان A جبر BCK تبادلي وضمني، فإن كل مثالي في A يحوي مثالي أولي يكون أولي

الإثبات:

ليكن I مثالي في A حيث $I \neq A$

لنفرض أن H مثالي أولي حيث $H \subseteq I$

عندئذ:

H المثالي أولي $\Leftrightarrow \quad a*b \in H$ or $b*a \in H \quad , \forall a,b \in H \subseteq I$

$\Rightarrow \{ a*b \in I$ or $b*a \in I$

حسب المبرهنة السابقة فإن I أولي

استخدمنا شرط التبادلي والضمني عند تطبيقنا للمبرهنة السابقة

نتيجة (2):

إذا كان A جبر BCK تبادلي وضمني عندئذ المثالي الصفري يكون أولي $\Leftrightarrow$ كل مثالي هو مثالي أولي

الإثبات:

$\Leftarrow$ إذا كان كل مثالي في BCK أولي عندئذ المثالي الصفري أولي حسب نتيـ

$\Rightarrow$ لنفرض أن الصفر مثالي أولي، نعلم أن كل مثالي يحوي مثالي أولي يكون أولي والمثالي الصفري يحتوى في أي مثالي ومنه يتم المطـ

استخدمنا شرط التبادلي والضمني عندما طبقنا النتيجة الأولى

/ /

تعريف: يقال عن جبر BCK "A" إنه خطي إذا حقق ما يلي:

$\forall a,b\in A \quad : \quad a\leq b \quad or \quad b\leq a$

تمرين:

إذا كان A جبر BCK تبادلي وضمني وخطي بين أن المثالي الصفري يكون أولي

(إذا كان A جبر BCK تبادلي وضمني فإن المثالي {0} أولي إذا فقط إذا كان A جبر BCK خطي)

الحل:

• ليكن b و a عناصر اختيارية عشوائية من A

لدينا $a\leq b$ أو $b\leq a$ لأن A جبر BCK خطي

ومنه $a*b=0$ أو $b*a=0$

إذاً $a*b\in\{0\}$ أو $b*a\in\{0\}$

⇐ فيتضح أن {0} أولي

(حسب مبرهنة سابقة: A تبادلي وضمني عندئذ I مثالي أولي ⇔ $a*b\in I$ أو $b*a\in I$)

•• لنفرض أن {0} مثالي أولي في A وليكن b و a عنصرين من A

حسب مبرهنة سابقة فإن $a*b\in\{0\}$ or $b*a\in\{0\}$

وبالتالي $a*b=0$ or $b*a=0$

$\Rightarrow a\leq b$ or $b\leq a$

$\Rightarrow$ A جبر BCK خطي

تمرين:

ليكن A جبر BCK تبادلي وضفي ولنكن $I \neq A$ مثالياً في A

أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون I مثالي أولي هو أن

يكون جبر BCK الخارج A/I خطياً

(I أولي $\Leftrightarrow$ $A/_I$ خطي)

الحل:

$\boxed{\Leftarrow}$ لنفرض أن I مثالي أولي ولنبرهن أن $A/_I$ خطي

بما أن I مثالي أولي عندئذ حسب مبرهنة سابقة

$\forall a,b \in A$: $a * b \in I$ or $b * a \in I$

وبالتالي:

$$C_a \cdot C_b = C_{a*b} = C_0 \quad or \quad C_b \cdot C_a = C_{b*a} = C_0$$

$$C_a \leq C_b \quad or \quad C_b \leq C_a$$

إذاً $A/_I$ خطي

$\boxed{\Rightarrow}$ لنفرض أن $A/_I$ خطي عندئذ

$$C_a \leq C_b \quad or \quad C_b \leq C_a$$

وذلك مهما يكن $a,b \in A$

$$\underset{I}{\underset{\shortparallel}{C_{a*b}}} = C_a \cdot C_b = C_0 \quad or \quad \underset{I}{\underset{\shortparallel}{C_{b*a}}} = C_b \cdot C_a = C_0$$

$$\Rightarrow a * b \in I \quad or \quad b * a \in I$$

إذاً I مثالي أولي

/ /

نتيجة:

لتكن A جبر BCK

$$>a< = \{x \in A : x * a = 0\}$$

لتكن J مثالياً في جبر BCK عندئذٍ:

$$>a< \subseteq J \iff a \in J$$

الإثبات:

$$a \in >a< \subseteq J \Rightarrow a \in J$$

لتكن $a \in J$ ولنبرهن أن $>a< \subseteq J$

الاحتواء $\Leftarrow$ $x \in >a< \Rightarrow x * a = 0 \in J \Rightarrow x \in J$

محقق. (الصفر محتوى في أي مثالي)

نظرية:

لتكن A جبر BCK تبادلي وضمني وليكن I مثالي في A

عندئذٍ القضايا التالية تكون متكافئة $I \neq A$

1) I مثالي أولي في A

2) لأجل أي مثاليين ~~[illegible]~~ I_1, I_2 في A يكون:

$$I_1 . I_2 \subseteq I \Rightarrow I_1 \subset I \quad or \quad I_2 \subset I$$

$$I \text{ مثالي أولي } \iff \left[I_1 . I_2 \subseteq I \Rightarrow I_1 \subset I \text{ or } I_2 \subset I \right]$$

أياً كان I_1, I_2 مثاليين في A

الإثبات:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ ليكن I مثالي أولي في A

ولنفرض أن $I_1 . I_2 \subset I$

نفرض جدلاً أن $I_1 \not\subset I$, $I_2 \not\subset I$

إذاً:

$$\left.\begin{matrix} \exists\, a \in I_1 \,;\, a \notin I \\ \exists\, b \in I_2 \,;\, b \notin I \end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} a \wedge b \in I_1 . I_2 \\ a \wedge b \notin I \end{matrix}\right.$$ (كون I مثالي أولي)

(I مثالي أولي: $a \wedge b \in I \Leftrightarrow a \in I$ or $b \in I$
$a \notin I \,,\, b \notin I \Leftrightarrow a \wedge b \notin I$)

$$a \wedge b \notin I \Rightarrow I_1 . I_2 \notin I$$

(هذا يناقض الفرض)

إذاً الفرض الجدلي خاطئ ومنه $I_1 \subset I$ or $I_2 \subset I$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$: لنفرض أن القضية الثانية محققة أي

$$I_1 . I_2 \subseteq I \Rightarrow I_1 \subset I \text{ or } I_2 \subset I$$

ولنبرهن أن I مثالي أولي

لنفرض أن $a, b \in A$ حيث $a \wedge b \in I$

ولنبرهن أن $a \in I$ أو $b \in I$

A جبر BCK تبادلي:
$a \le b \Leftrightarrow \rangle a \langle \subseteq \rangle b \langle$
$\rangle a \wedge b \langle = \rangle a \langle \cap \rangle b \langle$

$I \cap J = I . J$

نعلم أن: $\rangle a \wedge b \langle \overset{A \text{ تبادلي}}{=} \rangle a \langle \cap \rangle b \langle \overset{A \text{ ضمني؟ تبادلي}}{=} \rangle a \langle . \rangle b \langle$

$$\Rightarrow \rangle a \wedge b \langle \subseteq I$$

لأن: $\rangle a \langle \subseteq I \Leftrightarrow a \in I$

$$\Rightarrow \rangle a \langle . \rangle b \langle \subseteq I$$

وحسب الفرض $\Leftarrow$ $\rangle a \langle \subset I$ or $\rangle b \langle \subset I$

$$\Rightarrow a \in I \text{ or } b \in I \Rightarrow I \text{ أولي}$$

Alamal

/ /

جبور BCK المحدودة:

إن جبر BCK المحدود هو مجموعة A مزودة بعنصرين مميزين يرمز لهما 1 و 0 وبعملية ثنائية $*$ حيث تتحقق الشروط:

$\boxed{1}$ $x * x = 0$

$\boxed{2}$ $x * (x * y) = y * (y * x)$

$\boxed{3}$ $x * 0 = x$

$\boxed{4}$ $(x * y) * z = (x * z) * y$

والشرط الإضافي: $\boxed{5}$ $x * 1 = 0$

وذلك أياً كان $x, y, z \in A$

ملاحظة: إن العنصرين المميزين 0 , 1 منفصلان

الإثبات: لنفرض أن $0 = 1$ ⇐ أياً كان $x \in A$ فإن

$x = x * 0 = x * 1 = 0$

وهذا يعني أن A هو الجبر التافه $A = \{0\}$ وهذا تناقض.

اصطلاح ونتائج أولية:

ليكن A جبر BCK المحدود:

نرمز ما يلي: $e(x) = 1 * x$

عندئذ:

$e(0) = 1 * 0 = 1$

$e(1) = 1 * 1 = 0$

(مفهوم للتعم) $e(e(x)) = 1 * e(x) = 1 * (1 * x) \overset{\text{تبادلي}}{=} x * \underbrace{(x * 1)}_{=0}$

$\overset{\text{محايد}}{=} x * 0 = x$

المحاضرة 19 $\qquad$ 13 / 12 / 2017

مبرهنة:

لتكن A جبر BCK محدود عندئذ:

1] $e(a) * b = e(b) * a$

$$e(a) * b = (1 * a) * b = (1 * b) * a = e(b) * a$$

2] $a * e(b) = b * e(a)$

$$e(e(x)) = x$$

$$\underbrace{a}_{e(e(a))} * e(b) = e(\underbrace{e(a)}_{x}) * \underbrace{e(b)}_{y}$$

$$\overset{(1)}{=} e(e(b)) * e(a) \qquad e(x) * y = e(y) * x$$

$$= b * e(a)$$

3] $e(a) * e(b) = b * a$

$$e(a) * \overbrace{e(b)}^{y} \overset{(1)}{=} e(e(b)) * a \qquad e(a) * y = e(y) * a$$

$$= b * a$$

4] $e(e(a)) * a = 0$

$$a * a = 0$$

$$e(e(a)) * a = e(a) * e(a) = 0 \qquad \text{أي من } (1)$$

4,5 لم يعط في الجامعة

/ /

5] $e(e(e(a))) = e(a)$

$$e(e(1*a)) = e(1*(1*a)) = 1*(1*(1*a))$$
$$= 1*a = e(a)$$

نظرية:

ليكن A جبر BCK محدود وضمني عندئذ

1] $a*e(a) = a$

2] $e(a)*a = e(a)$

3] $a*e(b) = a*(a*b) = a\wedge b$

وذلك أياً كان a,b من A

الإثبات:

1] $a*e(a) = a*(1*a) = a$

كون A ضمني

2] $e(a)*a = (1*a)*a = 1*a = e(a)$

كون A ضمني

3] $a*e(b) = (a*e(a))*e(b)$

$a = a*e(a)$

$$= (a*e(b))*e(a)$$

$$\overset{A\ \text{ضمني}}{=} \underbrace{(a*e(a))}_{} * \underbrace{(e(b)*e(a))}_{}$$

$$\overset{(1)}{=} a * (a*b)$$

من (3) المبرهنة السابقة

/ /

جبور BCK المحدودة والضمنية والشبكات البوليانية:

تعريف: ليكن $(A, 0, 1, *)$ جبر BCK محدود وضمني

ولنعتبر العملية الثنائية:

$a \wedge b = a * (a * b)$

$a \vee b = e(e(a) * b)$; $\forall a, b \in A$

نلاحظ مباشرة ما يلي: ~~$a \vee b = b \vee a$~~

$a \wedge a = a$; $a \vee a = a$

$a \wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$

$a \vee a = e(e(a) * a) = e(e(a)) = a$

(حسب (2) من المبرهنة الأخيرة)

بالإضافة إلى ذلك:

$a \wedge 0 = 0$

$a \vee 1 = 1$

$a \wedge 1 = a$

$a \wedge 0 = a * (a * 0) = a * a = 0$

$a \vee 1 = e(e(a) * 1) = e(0) = 1$

$a \wedge 1 = a * (a * 1) = a * 0 = a$

نظرية:

ليكن A جبر BCK تبادلي وضمني

1. $a * (b \vee c) = (a * b) * c$

$a * (b \vee c) = a * (e(\overbrace{e(b) * c}^{x}))$ $\qquad a * e(x) = x * e(a)$

$= (e(b) * c) * e(a)$

$= (e(b) * e(a)) * c$ $\qquad e(x) * e(y) = y * x$

Alamal

$= (a * b) * c$ ✓

/ /

$\boxed{2}$ $a * (a \vee b) = 0$

$a * (a \vee b) \overset{(1)}{=} (a * a) * b = 0 * b = 0$

ما كثير نوقف عالبرهان التركيز بالقليل

$\boxed{3}$ $(a \vee b) * a = b * a$

$e(x) * a = e(a) * x$

$(a \vee b) * a = e(\overbrace{e(a) * b}^{x}) * a = e(a) * (e(a) * b)$

$\overset{\text{تبادلي}}{=} b * (b * e(a))$ $\qquad x * e(y) = x * (x * y)$

$~~a * e(b) = a * (a * b)~~$

$= b * (b * (b * a))$

$= b * a$ حسب مبرهنة سابقة

$\boxed{4}$ $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

$\boxed{\Rightarrow}$ $a \leq b \Rightarrow a * b = 0$

لنبرهن أن $(a \vee b) * b = 0$ و $b * (a \vee b) = 0$ $\Leftarrow$ عندها يكون $a \vee b = b$

$(a \vee b) * b = (\underline{\underline{b}} \vee a) * \underline{\underline{b}} \overset{(3)}{=} a * b = 0 \Rightarrow a \vee b \leq b$

$a \leq b \Leftrightarrow a * b = 0$

$b * (a \vee b) = b * (b \vee a) \overset{(2)}{=} 0 \Rightarrow a \vee b \geq b$

$\Rightarrow a \vee b = b$

$\boxed{\Leftarrow}$ $a \vee b = b$

$a * b \overset{(3)}{=} (a \vee b) * b \overset{\text{الفرض}}{=} b * b = 0 \Rightarrow a \leq b$

/ /

تمهيد :

ليكن A جبر BCK محدود وضمني ولنزود A بالعمليتين الثنائيتين .

$$a\wedge b = a * (a * b)$$
$$a\vee b = e(e(a) * b)$$

وبالعملية الأحادية (') المعرفة كمايلي :

$$a' = e(a)$$

$$\forall a, b \in A$$

(كل جبر BCK محدود وضمني هو جبر بول)

يلاحظ مباشرة مايلي :

$\boxed{1}$ $a\wedge a = a$
$a\vee a = a$

. $a\wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$

. $a\vee a = e(e(a) * a) = e(e(a)) = a$

$\boxed{2}$ $a\wedge 1 = a$
$a\vee 0 = a$

. $a\wedge 1 = a * (a * 1) = a * 0 = a$

. $a\vee 0 = e(e(a) * 0) = e(e(a)) = a$

$\boxed{3}$ $a\wedge b = b\wedge a$
$a\vee b = b\vee a$ A محدود جبر تبادلي

. $a\wedge b = a * (a * b) = b * (b * a) = b\wedge a$

. $a\vee b = e(e(a) * b) = e(e(b) * a) = b\vee a$

2] $a * (a \vee b) = 0$

$a * (a \vee b) \overset{(1)}{=} (a * a) * b = 0 * b = 0$

ما كتير توقف عليهن الدكتور بالتفصيل

3] $(a \vee b) * a = b * a$

$e(x) * a = e(a) * x$

$(a \vee b) * a = e(\overbrace{e(a) * b}^{x}) * a = e(a) * (e(a) * b)$

$\overset{A}{=}$ تبادلي $b * (b * e(a))$ $\qquad x * e(y) = x * (x * y)$

$a * e(b) = a * (a * b)$

$= b * (b * (b * a))$

$= b * a$ حسب مبرهنة سابقة

4] $a \leq b \iff a \vee b = b$

$\Rightarrow]$ $a \leq b \Rightarrow a * b = 0$

لنبرهن أن $\begin{cases} (a \vee b) * b = 0 \\ b * (a \vee b) = 0 \end{cases}$ و $\Leftarrow$ عندها يكون $a \vee b = b$

$(a \vee b) * b = (b \vee a) * b \overset{(3)}{=} a * b = 0 \Rightarrow a \vee b \leq b$

$a \leq b \iff a * b = 0$

$b * (a \vee b) = b * (b \vee a) \overset{(2)}{=} 0 \Rightarrow a \vee b \geq b$

$\Rightarrow a \vee b = b$

$\Leftarrow]$ $a \vee b = b$

$a * b \overset{(3)}{=} (a \vee b) * b \overset{\text{الفرض}}{=} b * b = 0 \Rightarrow a \leq b$

/ /

تمهيد:

ليكن A جبر BCK محدود صحيح ولنزود A بالعمليتين الثنائيتين:

$a \wedge b = a * (a * b)$

$a \vee b = e(e(a) * b)$

وبالعملية الأحادية (') المعرفة كما يلي:

$a' = e(a)$

$\forall a, b \in A$

(كل جبر BCK محدود صحيح هو جبر بول)

نلاحظ مباشرة ما يلي:

1] $a \wedge a = a$

$a \vee a = a$

. $a \wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$

. $a \vee a = e(e(a) * a) = e(e(a)) = a$

2] $a \wedge 1 = a$

$a \vee 0 = a$

. $a \wedge 1 = a * (a * 1) = a * 0 = a$

. $a \vee 0 = e(e(a) * 0) = e(e(a)) = a$

3] $a \wedge b = b \wedge a$

$a \vee b = b \vee a$ A محدود تبديلي

. $a \wedge b = a * (a * b) = b * (b * a) = b \wedge a$

. $a \vee b = e(e(a) * b) = e(e(b) * a) = b \vee a$

/ /

4] $a \wedge a' = 0$

$a \vee a' = 1$

$a \wedge a' = a * (a * a') = a * (\overbrace{a * e(a)}^{a}) = a * a = 0$

$a \vee a' = e(e(a) * a') = e(\underbrace{e(a) * e(a)}_{0}) = e(0) = 1$

يلاحظ على الفور أن:

$$\boxed{e(a \vee b) = e(e(e(a) * b)) = e(a) * b}$$

الآن سنبرهن أن $\wedge$ و $\vee$ تجميعيان.

5] $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

$a \vee (\underbrace{b \vee c}_{x}) = e(e(a) * (b \vee c))$

$= e\left(e(a) * \underbrace{e(e(b) * c)}_{y}\right)$

$e(a) * y = e(y) * a$

$= e\left(e\left(\underbrace{e(e(b) * c)}_{y}\right) * a\right)$

$= e\left((e(b) * c) * a\right) = e\left((e(b) * a) * c\right)$

$= e\left(\left(\underbrace{e(a) * b}_{e(a \vee b)}\right) * c\right) = e\left(e(a \vee b) * c\right)$

$= e(e((a \vee b) \vee c)) = (a \vee b) \vee c$

/ /

$\boxed{2}$ $a * (a \vee b) = 0$

$a * (a \vee b) \overset{(1)}{=} (a * a) * b = 0 * b = 0$

ما كتير بوقف عالبرهان الدكتور بالمقابل

$\boxed{3}$ $(a \vee b) * a = b * a$

$e(x) * a = e(a) * x$

$(a \vee b) * a = e(\overbrace{e(a) * b}^{x}) * a = e(a) * (e(a) * b)$

$\overset{A\ \text{تبادلي}}{=} b * (b * e(a))$ $\qquad x * e(y) = x * (x * y)$

$a * e(b) = a * (a * b)$

$= b * (b * (b * a))$

$= b * a$ حسب مبرهنة سابقة

$\boxed{4}$ $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

$\boxed{\Rightarrow}$ $a \leq b \Rightarrow a * b = 0$

لنبرهن أن $(a \vee b) * b = 0$ و $b * (a \vee b) = 0$ $\Leftarrow$ عندها يكون $a \vee b = b$

$(a \vee b) * b = (b \vee a) * b \overset{(3)}{=} a * b = 0 \Rightarrow a \vee b \leq b$

$a \leq b \Leftrightarrow a * b = 0$

$b * (a \vee b) = b * (b \vee a) \overset{(2)}{=} 0 \Rightarrow a \vee b \geq b$

$\Rightarrow a \vee b = b$

$\boxed{\Leftarrow}$ $a \vee b = b$

$a * b \overset{(3)}{=} (a \vee b) * b \overset{\text{الفرض}}{=} b * b = 0 \Rightarrow a \leq b$

/ /

تمهيد:

ليكن A جبر BCK محدود وضمني ولنزود A بالعمليتين الثنائيتين.

$$a \wedge b = a * (a * b)$$
$$a \vee b = e(e(a) * b)$$

وبالعملية الأحادية $(')$ المعرفة كمايلي:

$$a' = e(a)$$

$$\forall a, b \in A$$

(كل جبر BCK محدود وضمني هو جبر بول)

يلاحظ مباشرة مايلي:

1] $a \wedge a = a$

$a \vee a = a$

- $a \wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$
- $a \vee a = e(e(a) * a) = e(e(a)) = a$

2] $a \wedge 1 = a$

$a \vee 0 = a$

- $a \wedge 1 = a * (a * 1) = a * 0 = a$
- $a \vee 0 = e(e(a) * 0) = e(e(a)) = a$

3] $a \wedge b = b \wedge a$

$a \vee b = b \vee a$ A محدود ضمني تبادلي

- $a \wedge b = a * (a * b) = b * (b * a) = b \wedge a$
- $a \vee b = e(e(a) * b) = e(e(b) * a) = b \vee a$

4] $a \wedge a' = 0$

$a \vee a' = 1$

- $a \wedge a' = a * (a * a') = a * (\overbrace{a * e(a)}^{a}) = a * a = 0$
- $a \vee a' = e(e(a) * a') = e(\underbrace{e(a) * e(a)}_{e(a)}) = e(0) = 1$

يلاحظ على الفور أن:

$$\boxed{e(a \vee b) = e(e(e(a) * b)) = e(a) * b}$$

الآن سنبرهن أن $\wedge$ و $\vee$ تجميعيان

5] $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

- $a \vee (\underbrace{b \vee c}_{x}) = e(e(a) * (b \vee c))$

$= e\left(e(a) * \underbrace{e(e(b) * c)}_{y}\right)$

$e(a) * y = e(y) * a$

$= e\left(e\left(\underbrace{e(e(b) * c)}_{y}\right) * a\right)$

$= e\left((e(b) * c) * a\right) = e\left((e(b) * a) * c\right)$

$= e\left(\underbrace{(e(a) * b)}_{e(a \vee b)} * c\right) = e\left(e(a \vee b) * c\right)$

$= e(e((a \vee b) \vee c)) = (a \vee b) \vee c$

Alamal

$$a \wedge (b \wedge c) = a * e(b \wedge c) = \underset{x}{a} * e(\underbrace{b * e(c)}_{y})$$

$x \wedge y = x * (x * y)$

$x \wedge y = x * e(y)$ برهن

$$= (b * e(c)) * e(a) = (b * e(a)) * e(c)$$

$$= (a * e(b)) * e(c) = (a \wedge b) * e(c)$$

$$= (a \wedge b) \wedge c$$

نظرية:

تكررت في الامتحان [illegible]

إذا كان A جبر BCK محدود وضمني عندئذ:

(1) $a * (b \vee c) = (a * b) \wedge (a * c)$

(2) $a * (b \wedge c) = (a * b) \vee (a * c)$

الإثبات:

$a * (b \vee c) = (a * b) * c$ مبرهنة سابقة

(1)

$$a * (b \vee c) = (\underbrace{a * b}) * c$$

حسب مبرهنة سابقة

$$= \Big(\overset{x}{a} * \underbrace{\overset{y}{(a * (a * b))}}\Big) * \overset{z}{c}$$

$$\text{ضمني } A = (a * c) * \wedge \big((a * (a * b)) * c\big)$$

$$= (a * c) * \big((a * c) * \underline{(a * b)}\big)$$

$$= (a * c) \wedge (a * b) = (a * b) \wedge (a * c)$$

Alamal

$(a * b) \wedge (a * c) = (a * b) * ((a * b) * (a * c)) = (a * b) * ((a * (a * c)) * b)$

$= (a * (a * (a * c))) * b = (a * c) * b = (a * b) * c = a * (b \vee c)$

$b\wedge c \le b \Rightarrow a*b \le a*(b\wedge c)$
$b\wedge c \le c \Rightarrow a*c \le a*(b\wedge c)$ $\Bigg\}\Rightarrow (a*b)\vee(a*c) \le a*(b\wedge c)$

$a*((a*b)\vee(a*c)) = a*(a*b)\wedge a*(a*c) = (a\wedge b)\wedge(a\wedge c) = a\wedge(b\wedge c) \le b\wedge c$
$\Rightarrow a*((a*b)\vee(a*c)) \le b\wedge c \Rightarrow a*(b\wedge c) \le (a*b)\vee(a*c)$

(2) سنبرهن أن: $a*(b\wedge c) \le (a*b)\vee(a*c) \le a*(b\wedge c)$

ملاحظة:
$$\left.\begin{array}{l} x \le z \\ y \le z \end{array}\right\} \Rightarrow x\vee y \le z$$

نعلم أن:
(1') $(a*b)*(a*(b\wedge c)) = 0$?
$\Rightarrow a*b \le a*(b\wedge c)$

وذلك لأن: $(b\wedge c)*b = 0$

ملاحظة البرهان [illegible]

وأيضاً نعلم أن:

$\left.\begin{array}{l} a\le c \\ b\le c \end{array}\right\} \Rightarrow a\vee b \le c$? (2') $(a*c)*(a*(c\wedge b)) = 0$

$\vee b)*c = e(e(a)*b)*c = e(c)*(e(a)*b)$

$e(c)*0)*(e(a)*b)$

وذلك لأن $(c\wedge b)*c = 0$

$e(c)*(a*c))*(e(a)*b)$

$a*c)*(a*c))*(e(a)*b)$

~~$*a)*c)*(e(a)*b) = (e(a)*c)*(e(a)*b)$~~

من (1') و (2') نستنتج أن:

$c)*(b*e(a))$

$(a*b) \le a*(b\wedge c)$

$(a*c) \le a*(c\wedge b) = a*(b\wedge c)$

وباستخدام الملاحظة ولأن $*$ تبديلي نجد أن:

$$\boxed{(a*b)\vee(a*c) \le a*(b\wedge c)} \quad \ldots (*)$$

وبذلك يتم إثبات القسم الأول من المبرهنة

في الواقع لدينا: $a*((a*b)\vee(a*c)) = (a*(a*b))\wedge(a*(a*c))$.
وذلك وفقاً للقسم الأول من النظرية

$= (a\wedge b)\wedge(a\wedge c)$
$= a\wedge(b\wedge c)$

Alamal

/ /

"$\wedge$" تجميعية وتبديلية و $a \wedge a = a$ (باستخدام بعض النتائج السابقة)

$a \wedge (b \wedge c) \leq b \wedge c$

لأن: $x \wedge y \leq y$

$(x * (x * y)) * y = 0$

$\Rightarrow a * ((a * b) \vee (a * c)) \leq b \wedge c$

$\Rightarrow a * (b \wedge c) \leq (a * b) \vee (a * c)$?

(حسب ملاحظة سابقة)

مبرهنة:

إذا كان A جبر BCK محدود وضمني فإن:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$ (الخاصة التوزيعية)

الإثبات:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= a * (a * (b \vee c)) \\ &= a * ((a * b) \wedge (a * c)) \\ &= (a * (a * b)) \vee (a * (a * c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

/ /

نتيجة:
ليكن A جبر BCK محدود وضمني عندئذ:
لكل عنصر $a \in A$ متمم وهذا المتمم وحيد.

أثبت صحة قانون دومورغان
أثبت أن المتمم وحيد

الإثبات:
. لنفرض أن $a' = e(a)$

. $a \wedge a' = a * (a * a') = a * (a * e(a)) = a * a = 0$

.. $a \vee a' = e(e(a) * a') = e(e(a) * e(a)) = e(0) = 1$

. ليكن a' و a'' كل منهما متمم للعنصر a ولنبرهن أن $a' = a''$
في الواقع لدينا:

$a \wedge a' = a \wedge a'' = 0$
$a \vee a' = a \vee a'' = 1$

لنبرهن أولاً أن:

$$(1) \quad a' * a = a'$$
$$(2) \quad a'' * a = a''$$

لدينا مباشرة:
$$\left.\begin{array}{l}(a' * a) * a' = 0 \\ a' * (a' * a) = a' \wedge a = 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow a' * a = a' \quad (1)$$

بنفس الأسلوب نجد (2)
الهدف الأساسي هو إثبات أن $a' = a''$ لنثبت أن
$$\begin{pmatrix} a' * a'' = 0 \\ a'' * a' = 0 \end{pmatrix}$$

/ /

$\bullet\ a' * a'' = (a' * a) * a''$

$a*(b \vee c) = (a*b)*c$

$= a' * (a \vee a'')$

$x * 1 = 0$

محدود A $= a' * 1 = 0$

$\bullet\bullet\ a'' * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a \vee a')$

$= a'' * 1 = 0$

إذاً $a' = a''$ (م . و ...)

نتيجة :

لتكن I مثالي أولي في جبر BCK محدود وضمني عندئذ :

$\forall x \in A : x \in I \text{ or } e(x) \in I$

(من أجل أي عنصر من A فإن هذا العنصر ينتمي للمثالي الأولي أو متممه ينتمي للمثالي الأولي)

البرهان

$x \wedge e(x) = x * (\overbrace{x * e(x)}^{x}) = x * x = 0 \in I$

وبما أن I أولي عندئذ :

إما $x \in I$ أو $e(x) \in I$

/ /

نتيجة:
لتكن I مثالي أولي في جبر BCK محدود ضمني A عندئذ:

$$a \vee b \in I \iff a \in I \text{ and } b \in I$$

الإثبات:

$\boxed{\Rightarrow}$ $a \vee b \in I$

$a * (a \vee b) = 0 \in I$
$b * (a \vee b) = 0 \in I$

$\boxed{\Leftarrow}$ $(a \vee b) * a = \underbrace{b * a}_{\in I} \in I$

حسب الفرض في نص المبرهنة

$\Rightarrow (a \vee b) * \underbrace{a}_{\in I} \in I$

$\Rightarrow a \vee b \in I$

/ /

بنية الجبر البولياني:

← تعريف:
لتكن B مجموعة تحوي عنصرين على الأقل نرمز لهما 0 و 1
ولنعرف على هذه المجموعة عملية ثنائية نرمز لها بـ "$\vee$"

$$\vee : B\times B \longrightarrow B$$
$$(a,b) \longmapsto a\vee b$$

$$\wedge : B\times B \longrightarrow B$$
$$(a,b) \longmapsto a\wedge b$$

$$\bar{\ } : B \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto \bar{a}$$

نقول عن المجموعة B إنها تملك بنية جبر بول (الجبر البولياني)
إذا حققت الخواص التالية:

1) عمليتا الجمع والضرب تبديليتين: $a\vee b = b\vee a$
$a\wedge b = b\wedge a$

2) عمليتا الجمع والضرب تجميعيتين: $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$
$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

3) يوجد عنصر حيادي بالنسبة للجمع نرمز له 0
$\forall a\in B: \ a\vee 0 = 0\vee a = a$
يوجد عنصر حيادي بالنسبة للضرب نرمز له 1
$\forall a\in B: \ a\wedge 1 = 1\wedge a = 0$

/ /

الجمع توزيعي على الضرب والضرب توزيعي على الجمع

~~$\forall a,b,c$~~

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

حيادي الضرب مع متممه $a \vee \bar{a} = 1$

حيادي الجمع مع متممه $a \wedge \bar{a} = 0$

بعض خواص الجبر البولياني:

إذا كان $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ جبر بول:

1) خاصة اللانمو: $\forall a \in B ;\ a \vee a = a \wedge a = a$

الصفر عنصر ماص بالنسبة للضرب والواحد عنصر ماص بالنسبة للجمع $\begin{pmatrix} a \vee 1 = 1 \\ a \wedge 0 = 0 \end{pmatrix}$

متمم وحيد $\bar{\bar{a}} = a$

1, 0 متتامان $\bar{1} = 0$ و $\bar{0} = 1$

قانون دومورغان:

$\forall a, b \in B :\ \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

$\begin{pmatrix} a \vee c = b \vee c \\ a \wedge c = b \wedge c \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b$

$\begin{pmatrix} a = b \\ c = d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a \vee c = b \vee d \\ a \wedge c = b \wedge d \end{matrix}$

Alamal

/ /

$a=b \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$

$a \wedge b=1 \Rightarrow a=b=1$

$a \vee b=0 \Rightarrow a=b=0$

إن المبرهنات والنتائج الأخيرة تقودنا إلى إيراد المبرهنة الأساسية

المبرهنة الأساسية:

كل جبر BCK محدود وضمني يكون جبر بول.

(نحلل أن كل جبر BCK محدود وضمني يكون جبر بول برهان أن $\wedge$ توزيعي بالنسبة لـ $\vee$)

لكل عنصر متمم وهو وحيد

برهن خاصة التبديل . $a \wedge b=b \wedge a$

$\vee$ تبديلي

$\wedge$ تبديلي . $a \vee b=b \vee a$

. $a \wedge a=a$

. $a \vee a=a$

$\wedge, \vee$ تجميعية

توزيعية

لكل $a \in A$ يوجد متمم a'

$a' \vee a=1$

$a \wedge a'=0$

لكل عنصر متمم وهذا المتمم وحيد

إذاً A على بنية جبر بول

$x \wedge y = x*(x*y) = x*e(y)$

$\bigstar$ ~~$e(x \vee y) = e(x) \wedge e(y)$~~

~~$e(x \vee y) = e(e(e(x)*y)) = e(x)*y = e(x)*e(e(y)) = e(x) \wedge e(y)$~~

~~$e(x \wedge y) = e(x) \vee e(y)$~~

~~$e(x \wedge y) = e(x*e(y)) = e(e(e(x)*e(y))) = e(x) \vee e(y)$~~

$a \wedge (b*c) \overset{?}{=} (a \wedge b)*c$

$a \wedge (b*c) = a*(a*(b*c)) = (b*c)*((b*c)*a)$

$= (b*c)*((b*a)*c)$ $\qquad (x*y)*(z*y) = (x*z)*y$

$= (b*(b*a))*c$

$= (a \wedge b)*c$

$a \wedge (b*c) = (a \wedge b)*(a \wedge c)$

$(a \wedge b)*(a \wedge c) = (a*(a*b))*(a*(a*c))$

$= (a*e(b))*(a*e(c))$

$= (b*e(a))*(c*e(a))$

$= (b*c)*e(a)$

$= a \wedge (b*c)$

Alamal

/ /

كل جبر BCK محدود وضمني يكون جبر بول

لكن $(A, 0, 1, *)$ جبر BCK محدود وضمني ولنعرّف العمليات التالية:

$x \wedge y = x * (x * y)$

$x \vee y = e(e(x) * y)$

$\bar{x} = e(x)$

★ 1) إن $\vee$ ، $\wedge$ تبديليتان:

$x \wedge y = x * (x * y) = y * (y * x) = y \wedge x$

$x \vee y = e(e(x) * y) = e(e(y) * x) = y \vee x$

★ 2) إن $\vee$ ، $\wedge$ تجميعيتان لأن

$a \wedge (b \wedge c) = a * (a * (b \wedge c)) = a * e(b \wedge c)$

$= a * e(b * (b * c)) = a * e(b * e(c))$

$= (b * e(c)) * e(a) = (b * e(a)) * e(c)$

$= (b * (b * a)) * e(c) = (a * (a * b)) * e(c)$

$= (a \wedge b) * e(c) = (a \wedge b) \wedge c$

$a \vee (b \vee c) = a \vee e(e(b) * c) = e(e(a) * e(e(b) * c))$

$= e((e(b) * c) * e(e(a))) = e((e(b) * c) * a)$

$= e((e(b) * a) * c) = e((e(a) * b) * c)$

$= e(\underbrace{e(e(e(a) * b))}_{a \vee b} * c) = e(e(a \vee b) * c)$

$= (a \vee b) \vee c$

$a \vee (b \vee c) = a \vee (e(b) * c) = e(e(a) * e(e(b) * c))$

$e((e(b) * c) * e(e(a))) = e((e(b) * c) * a) =$

Alamal

$a \wedge (b \vee c) = a * (a * (b \vee c)) = a * (a * b \wedge a * c) = a * (a * b) \vee a * (a * c)$

$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

/ /

$a \vee 0 = e(e(a) * 0) = e(e(a)) = a$ (3

$a \wedge 1 = a * (a * 1) = a * 0 = a$

(4 ★ V توزيعي على ∧ و ∧ توزيعي على V الآن

$a \wedge (b \vee c) = a * (a * (b \vee c)) = a * ((a * b) \wedge (a * c))$

$= a * (a * b) \vee a * (a * c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = e(e(a) * (b \wedge c)) = e((e(a) * b) \vee (e(a) * c))$

$= e(e(a) * b) \wedge e(e(a) * c)$

$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$a \vee a' = e(e(a) * a') = e(e(a) * e(a)) = e(0) = 1$ (5 ★

$a \wedge a' = a * e(a') = a * e(e(a)) = a * a = 0$

نتائج

1.) $a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a$

$a \wedge a = a * (a * a) = a * 0 = a$

$a \vee a = e(\underbrace{e(a) * a}_{e(a)}) = e(e(a)) = a$

) $a \wedge (a \vee b) = a \quad , \quad a \vee (a \wedge b) = a$

$= a * e(a \vee b) = a * e(e(e(a) * b)) = a * (e(a) * b)$

$= a * (e(b) * a) = a$

$a \wedge b) = e(e(a) * (a \wedge b)) = e(e(a) * (a * e(b)))$

$= e(e(a) * (b * e(a))) = e(e(a)) = a$

Alamal

★ 3.) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

$(a \vee b)' = e(a \vee b) = e(e(e(a) * b)) = e(a) * b = e(a) * e(e(b))$

$a \vee b = a * (a * b) = a * e(b)$ $= e(a) \wedge e(b)$

$= a' \wedge b'$

$(a \wedge b)' = e(a \wedge b) = e(a * e(b)) = e(e(e(a)) * e(b))$

$= e(a) \vee e(b) = a' \vee b'$

★ 4.)

المتمم الأحادي عنصر وحيد

لنبرهن أولاً أن : $x * x' = x'$ ، $x' * x = x'$

نفرض ان وحيدان يحصر متممان x' و x'' : $x'' * x = x''$

$(x' * x) * x' = x' * (x \vee x') = x' * 1 = 0 \Rightarrow x' * x \geq x'$

$x' * (x' * x) = x' \wedge x = 0 \Rightarrow x' \leq x' * x$

$\boxed{x' * x = x'}$

$x'' * x' = (x'' * x) * x' = x'' * (x \vee x') = x'' * 1 = 0 \Rightarrow x'' \leq x'$

$x' * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x \vee x'') = x' * 1 = 0 \Rightarrow x' \leq x''$

$\Rightarrow x' = x''$

نعم $\boxed{\begin{matrix} x' * x = x' \\ x * x' = x' \end{matrix}}$

وعليه $\cancel{x * x'}$ $x'' = x'$