المحاضرة 15

نظري ✓ / عملي

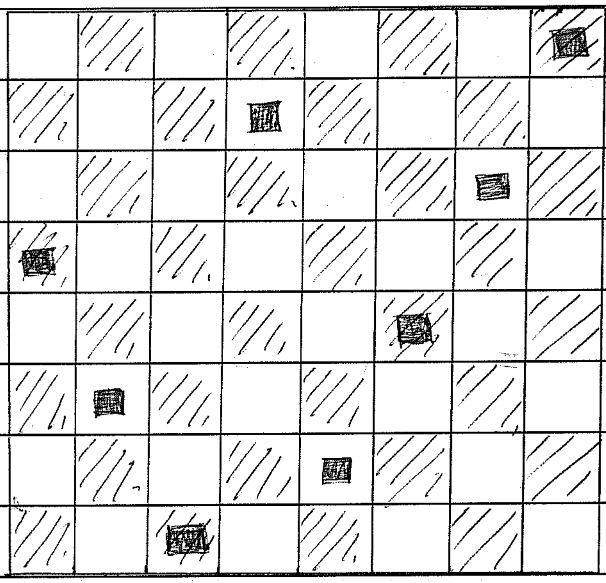
◄ دكتور المادة: خالد خنيفس

◄ عنوان المحاضرة: مسألة التغطية

Dominating Problem مسألة السيطرة (التغطية)

لمسألة السيطرة تطبيقات هامة ، اشتهرت مسألة السيطرة (التغطية) من خلال مسألة الوزراء الثمانية على رقعة الشطرنج ((ما هو أكبر عدد ممكن من الوزراء الممكن وضعها على رقعة الشطرنج بحيث لا يؤثر وزير على آخر؟)) التي طرحها Jaenisch عام 1960 ، وعدد الدراسات في هذه المسألة حوالي 180 رسالة.

- على رقعة الشطرنج العادية (8×8) يوجد 92 طريقة لترتيب 8 وزراء بحيث لا تؤثر على بعضها ، إحدى هذه الطرق:



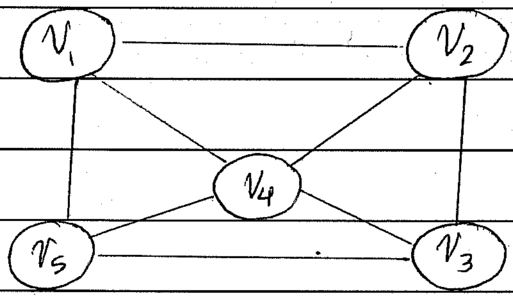
- إذا كانت الرقعة أكبر من رقعة الشطرنج العادية توجد تخمينات لأكبر عدد ممكن من الوزراء ، أهم تخمين من قبل Vizing (صحيح ضمن الرقعة 20x20 و 40x40)
- تساعد نظرية البيان على حل مثل هذه المسائل

- ليكن لدينا البيان البسيط $G(V,E)$ ، ولتكن D مجموعة جزئية من مجموعة العقد V (أي $D\subseteq V$) ، نسمي المجموعة D مجموعة عقد السيادة في البيان (Dominating set) ، وتتحقق من أجل كل عقدة في البيان :
إما أن تكون هذه العقدة عقدة سيادة أو توجد عقدة في D تجاور هذه العقدة أي :

$$\forall v\in V \Rightarrow v\in D \text{ or } \exists u\in D : (u,v)\in E$$

ملاحظة : نسمي أصغر مجموعة سيادة مجموعة السيادة الصغرى ، حيث يمثل عدد عناصرها عدد السيادة (Domination number) ، ونرمز له $\gamma(G)$

مثال: ليكن لدينا البيان التالي :

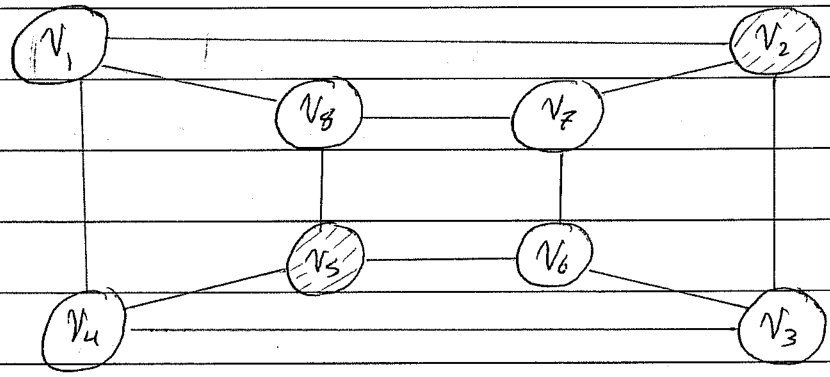


- لنأخذ المجموعة $D_1=\{v_1,v_3\}$ ، نلاحظ أن أي عقدة في البيان إما تنتمي لهذه المجموعة أو تجاور عقدة من المجموعة ، إذاً D_1 مجموعة سيادة
- لكن المجموعة $D_2=\{v_4\}$ هي مجموعة سيادة لنفس السبب ، وهي أصغر مجموعة سيادة ممكنة لذلك هنا عدد التغطية (عدد السيادة) هو عدد عناصر D_2

Domination Number $= D.N. = 1$

- المجموعة $D_3=\{v_2\}$ مثلاً ليست مجموعة سيادة ، لأن (v_5) لا تنتمي إلى D_3 ولا تجاور عقدة منها أيضاً.

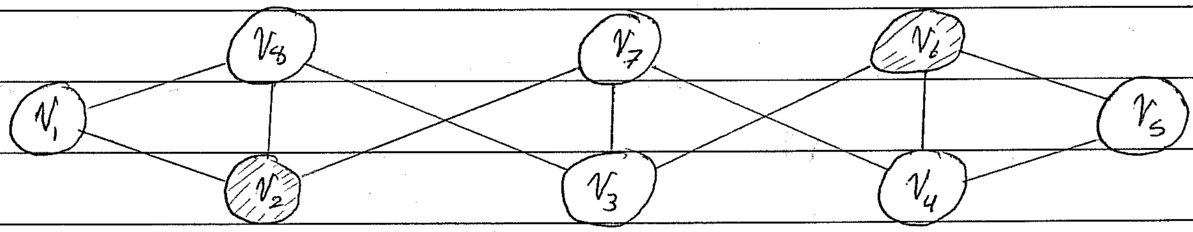
مثال: أوجد التغطية الصغرى في البيان التالي :
(لنجرب التغطيات الممكنة ونأخذ أصغرها)



أصغر تغطية هنا تحوي عقدتين، أي أنّ $D.N = 2$

إحدى التغطيات الصغرى لهذا البيان : $D = \{V_2, V_5\}$

مثال : أوجد مجموعة السيادة الصغرى للبيان التالي :



هنا عدد التغطية $D.N = 2$ ، وكل من المجموعتين التاليتين هي مجموعة سيادة صغرى :

$D_1 = \{V_2, V_6\}$, $D_2 = \{V_4, V_8\}$

ملاحظة :

- في التغطية الصغرى تكون كل عقدة مغطاة مرة واحدة في أغلب الأحيان
- نسمي مجموعة العقد المجاورة لعقدة في البيان جواراً مفتوحاً لهذه العقدة.
- إذا كانت هذه العقدة ضمن هذه المجموعة نسميها جواراً مغلقاً للعقدة.

أي إذا كانت $N \in V$: $|V|$

$N(N) = \{u : (u, v) \in E\}$

$N(N)$ جوار مفتوح لـ v

$D(N) = N(N) \cup \{v\}$ جوار مغلق لـ v .

- في المثال السابق: لنأخذ مجموعة السيطرة $D=\{v_4, v_8\}$ فالجوار المغلق لها:

$N(D) = \{v_i \; ; \; i=1:8\}$, $|N(D)| = 8$

- إذا كان الجوار المغلق لمجموعة السيطرة يساوي مجموعة العقد فمن الممكن أن تكون هذه المجموعة هي مجموعة صغرى

- ليكن البيان $G(V,E)$ ولتكن D هي أصغر مجموعة سيطرة
عندئذ $V-D$ مجموعة سيطرة.

الإثبات:
D مجموعة سيطرة، ولنثبت أن $V-D$ مجموعة سيطرة:
لتكن $v_1 \in V \Leftarrow$ إما ① $v_1 \in D$
أو ② $v_1 \in V-D$

① $v_1 \notin V-D$ عندئذٍ $\exists u \in V-D$ بحيث يكون $(u, v_1) \in E$ إذاً $v_1 \in D$
وعندئذٍ بما أن D مجموعة سيطرة بالفرض توجد عقدة $w \in V-D$ بحيث
$(v_1, w) \in E$

وبذلك يتحقق المطلوب.

② عندها يتحقق المطلوب ((تكون v_1 مسيطرة على نفسها))
وبذلك يتحقق التعريف ((إما $v_1 \in V-D$ أو $\exists u \in V-D$ بحيث $(u, v_1) \in E$))
إذاً $V-D$ مجموعة سيطرة.

- نرمز عادةً لمجموعة السيطرة الصغرى بـ $\gamma(G)$ حيث $G=(V,E)$
- بشكل عام مجموعة السيطرة الصغرى للبيان G تحقق:

$$\gamma(G) \leq \frac{|V|}{2}$$

ملاحظة: درجة بيان هي درجة أعلى عقدة في هذا البيان، ونرمز لها $\Delta(G)$

ونرمز لعدد عقد مجموعة السيطرة الصغرى ب $|\gamma(G)|$، عندئذٍ فإن عدد عقد مجموعة السيطرة الصغرى لبيان أصغر أو تساوي عدد عقد البيان ($n = |V|$) مطروحاً منها درجة البيان، أي:

$$\frac{n}{1+\Delta(G)} \leq |\gamma(G)| \leq n - \Delta(G)$$

- هذا التخمين وضع من قبل Vizing عام 1963، وهي أشهر مسألة مفتوحة حتى الآن، وتم إثبات ما يلي:

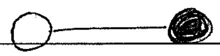
$$\boxed{\gamma(P_1 * P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil}$$

((حيث n هو عدد عقد البيان و $\lceil n \rceil$ أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي n))

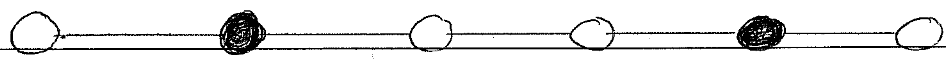
أمثلة:

- $n=2 \Rightarrow \gamma(P_1 * P_2) = \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = \lceil 0.6 \rceil = 1$

أي أن التغطية الصغرى تتألف من عقدة واحدة ويكون البيان بالشكل:

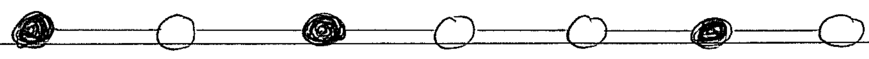


- $n=6 \Rightarrow \gamma(P_1 * P_6) = \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$



((وزعنا عقد التغطية بشكل أن كل عقدة من البيان تجاور واحدة أو أكثر من عقد التغطية))

- $n=7 \Rightarrow \gamma(P_1 * P_7) = \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = \lceil 2.3 \rceil = 3$

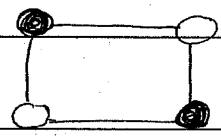


$$\boxed{\gamma(P_2 * P_n) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil}$$

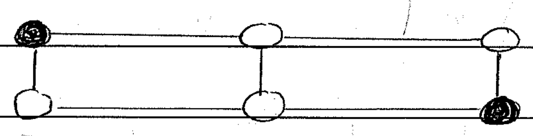
أمثلة :

- $n=1 \Rightarrow \gamma(P_2 * P_1) = \left\lceil \frac{1+1}{2} \right\rceil = 1$

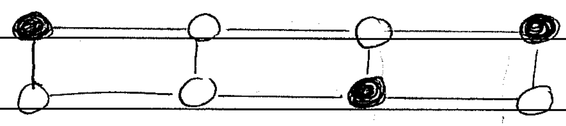
- $n=2$: $\gamma(P_2 * P_2) = 2$



- $n=3 \Rightarrow \gamma(P_2 * P_3) = 2$



- $n=4 \Rightarrow \gamma(P_2 * P_4) = 3$

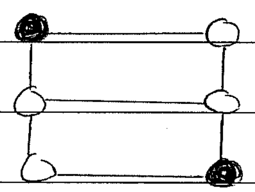


$$\boxed{\gamma(P_3 * P_n) = n - \left\lfloor \frac{(n-1)}{4} \right\rfloor}$$

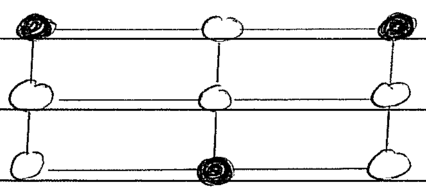
أمثلة :

- $n=2 \Rightarrow \gamma(P_3 * P_2) = 2 - \left\lfloor \frac{(2-1)}{4} \right\rfloor$
$= 2 - 0 = 2$

(حيث $\lfloor n \rfloor$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي n)



$n=3 \Rightarrow \gamma(P_3 * P_3) = 3$

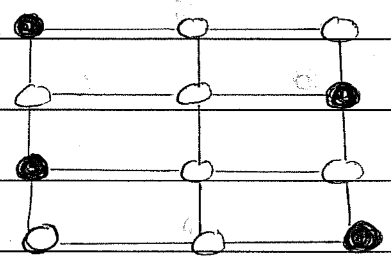


$$\boxed{\gamma(P_4 * P_n) = n+1 \quad ; n = 1, 2, 3, 5, 6, 9}$$

$$\gamma(P_4 * P_n) = n \quad ; n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 9$$

أمثلة :

$n=3 \Rightarrow \gamma(P_4 * P_3) = 4$

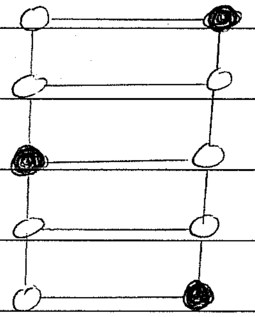


$$\gamma(P_5 * P_n) = n+1+\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor \quad ; n = 2, 3, 7$$

$$\boxed{\gamma(P_5 * P_n) = n+1+\left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \quad ; n \neq 2, 3, 7}$$

مثال :

$n=2 \Rightarrow \gamma(P_5 * P_2) = 3$



$$\boxed{\gamma(P_6 * P_n) = n + 1 + \left\lfloor \frac{3n+3}{5} \right\rfloor}$$

(تم برهان القوانين الثلاثة الأخيرة من قبل chong عام 1993)

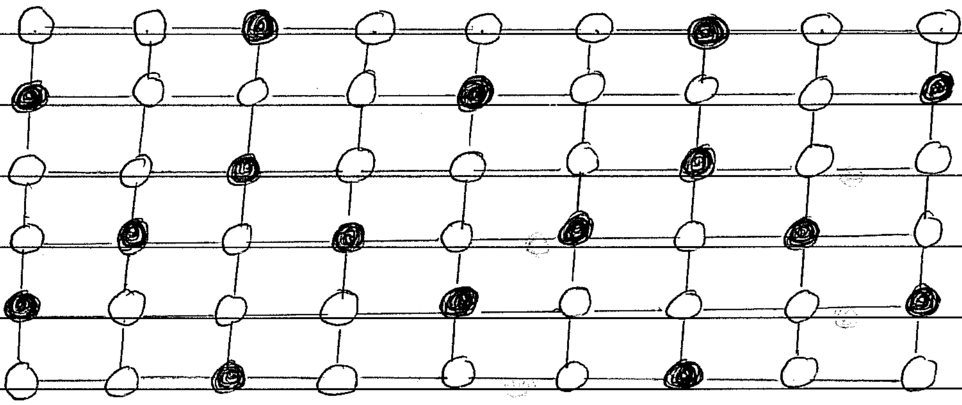
مثال: ليكن لدينا البيان

$G = (P_6 * P_9)$

ارسم البيان وأوجد مجموعة السيطرة الصغرى فيه.

الحل: لإيجاد عدد العقد في مجموعة السيطرة الصغرى نستخدم القانون السابق:

$$\gamma(P_6 * P_9) = 9 + 1 + \left\lfloor \frac{3 \times 9 + 3}{5} \right\rfloor = 16$$



ملاحظة: - الحل السابق ليس وحيداً، بل يمكن ترتيب العقد الـ 16 بطرق مختلفة طالما يتحقق أن كل عقدة من البيان هي إما عقدة من مجموعة السيطرة أو تجاور عقدة أو أكثر من مجموعة السيطرة.

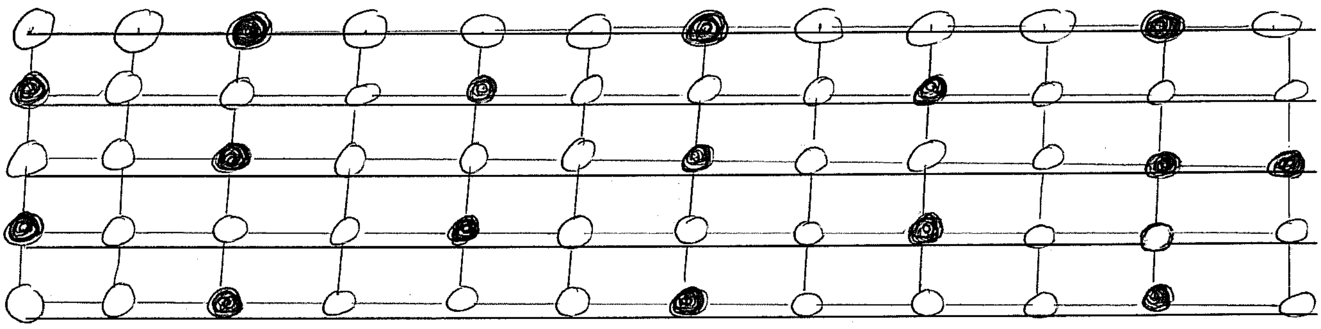
- القوانين الموضوعة ضمن إطارات هي الأهم للحفظ.

مثال: أوجد مجموعة السيطرة الصغرى للبيان $G = (P_5 * P_{12})$.

اعتماداً على القانون المناسب من القوانين السابقة نوجد عدد عقد التوطئة الصغرى:

$$\gamma(P_5 * P_{12}) = 12 + 1 + \left\lfloor \frac{12+3}{5} \right\rfloor$$

$$= 13 + \left\lfloor \frac{15}{5} \right\rfloor = 16$$



هل يمكن إيجاد عدد نقاط السيطرة في بيان باستخدام مفهوم المصفوفات ؟

يمكننا فعل ذلك من خلال الخوارزمية :

ليكن لدينا بيان $G=(V,E)$ بحيث $|V|=n$ و $\Delta(G)$ درجة البيان ، نريد إيجاد $\gamma(G)$:

① نوجد مصفوفة التجاور للبيان $A(G)$

② ثم نوجد المصفوفة $B(G)=A(G)+I$ (I مصفوفة الواحدة)

③ نوجد العدد k :

$|V|=n$ ، $k=\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil$

④ نوجد المصفوفة الجزئية B_k (مصفوفة مأخوذة من B فيها k سطر حيث ($k\geq 2$))
وكل سطر فيها w_{ij} حيث $i, j=1,\dots,k$ هي أدلة العقد الموافقة للأسطر .

نأخذ كل المصفوفات الجزئية من البعد $k*n$

⑤ نجمع عناصر الأسطر i مع بعضها ، وناتج المجموع هو متجه .

$w_{i1}+w_{i2}+\dots+w_{ik}=(b_1,\dots,b_k)$ (*)

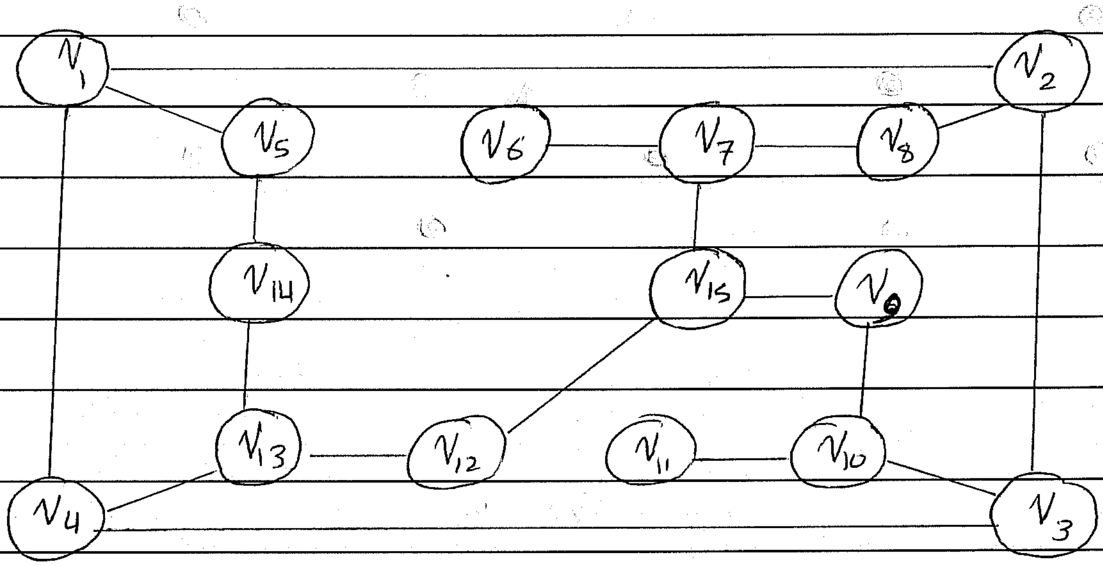
- إذا كان $b_l=0$ حيث $l=1:n$ ننتقل إلى المصفوفة التالية ،
وفي حال انتهاء المصفوفات نعيد تجزئة المصفوفة من جديد .

- إذا كان $b_l=0$ من أجل جميع المصفوفات الجزئية نضع $k=k+1$
ونعاود تجزئة المصفوفات حتى نحصل على مجموعة السيطرة :

$D=\{v_{i1},\dots,v_{ik}\}$

((*) b_l هو مجموع عناصر العمود l))

مثال: أوجد مجموعة السيطرة الصغرى للبيان التالي وفق الخوارزمية السابقة:



الحل: نكتب أولاً مصفوفة التجاور $A(G)$

لدينا 15 عقدة فالمصفوفة من البعد 15×15 ، نحصل على عناصرها بالشكل:

((إذا كانت العقدتان الممثلتان بسطر وعمود المصفوفة متجاورتين في البيان فعنصر المصفوفة المقابل $= 1$ ، وإن لم تكونا متجاورتين $= 0$))

$$\begin{array}{c} \\ A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{15} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & - & v_3 & v_4 & -- \; v_{15} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & --- \\ 1 & 0 & 1 & 0 & --- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

ثم نكتب المصفوفة B التي عرفناها بالشكل:

$$B = A(G) + I$$

((نفس المصفوفة السابقة A لكن نضع فيها جميع عناصر القطر الرئيسي $= 1$))

نحسب k من العلاقة:

$$k = \left\lceil \frac{15}{1+3} \right\rceil = 4$$

(($\Delta(G) = 3$ لأنها درجة أعلى عقدة في البيان))

نوجد الآن أول مصفوفة جزئية مكونة من $k=4$ أسطر :

$$B_4 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad - - - \quad v_{14} \; v_{15} \\ \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مجموع عناصر كل عمود (b_l) $\quad 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0$

أي أن :

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = (3,3,3,3,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0)$$

المجموع يحوي أصفار $\Leftarrow$ الشرط غير محقق.

لذلك نختار مصفوفة جزئية أخرى من 4 أسطر مختلفة :

$$B_4 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

والمجموع في هذه الحالة :

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{54} = (3,3,2,2,2,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0)$$

المجموع يحوي أصفار $\Leftarrow$ الشرط غير محقق.

بالمتابعة بهذه الطريقة نصل إلى المصفوفة التالية :

ملاحظة : لا توجد طريقة لمعرفة المصفوفة التي تحقق الشرط دون تجريب المصفوفات الجزئية بتغيير الأسطر في كل مرة ، لكن في حال وجود تجريب كهذا في الامتحان تكون المصفوفة أسطرها بسيطة.

$$B_4 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_7 \\ v_{10} \\ v_{13} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمجموع في هذه الحالة:

$$\omega_{11} + \omega_{72} + \omega_{10,3} + \omega_{13,4} = (1,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1)$$

لا توجد أي قيمة صفرية في المجموع $\Leftarrow$ الشرط محقق.

إذاً مجموعة السيطرة الصغرى:

$$D = \{v_1, v_7, v_{10}, v_{13}\}$$

انتهت المحاضرة