السؤال الأول : (دورة 2016 - 2017) الفصل الأول

$\boxed{1}$ - عرف الفضاء التبولوجي المترابط، ثم هل مجموعة الأعداد الطبيعية المزودة بتبولوجيا المتممات المنتهية هي فضاء مترابط ؟ برر.
وهل مجموعة مضاعفات العدد الأولي 2017 هي مجموعة مغلقة في هذا الفضاء ؟ وهل هي مفتوحة فيه ؟ برر.

الحل:

الفضاء التبولوجي المترابط :

يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء متصل (مترابط) إذا لم يكن X اجتماعاً لمجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين ومفتوحتين في X.

- نعم، $(\mathbb{N},\tau_c)$ فضاء مترابط، لاحظ صف المجموعات المفتوحة وصف المجموعات المغلقة.

- مجموعة مضاعفات العدد الأولي 2017 ليست مفتوحة ولا مغلقة

☆ ☆ ☆

$\boxed{2}$ عرف الفضاء المتراص وأثبت أن جداء فضاءين متراصين يكون متراصاً.

الحل:

- يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه متراص إذا حوى كل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تغطية جزئية منتهية.

لتكن كل من (X_1, T_1) و (X_2, T_2) فضاءً تبولوجياً متراصاً

ليكن $X = X_1 \times X_2$ مزودة بتبولوجيا الجداء T (أصغر تبولوجيا تجعل تطبيقات الإسقاط مستمرة)

لتكن $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ مرشحة أعظمية على X

و ليكن $(i=1,2)$، $p_{r_i} : X \to X_i$ تطبيق الإسقاط على X_i

إن تطبيق الإسقاط غامر ونعلم أن صورة المرشحة الأعظمية وفق تطبيق غامر هي مرشحة أعظمية ومنه:

$\mathcal{F}_i = P_{r_i}(\mathcal{F})$ مرشحة أعظمية على X_i

المتراص فهي متقاربة.

ومنه يوجد $x_i \in X_i$ بحيث أن $\mathcal{F}_i \to x_i$ ، $(i=1,2)$

بما أن:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 \to x_1 \\ \mathcal{F}_2 \to x_2 \end{cases}$$

فإن $V_{x_1} \subseteq \mathcal{F}_1$

$V_{x_2} \subseteq \mathcal{F}_2$

ومنه لأي $V_1 \in V_{x_1}$ و $V_2 \in V_{x_2}$

فإن $V_1 \in \mathcal{F}_1$ و $V_2 \in \mathcal{F}_2$

وبما أن $\mathcal{F}_1 = P_{r_1}(\mathcal{F})$ و $\mathcal{F}_2 = P_{r_2}(\mathcal{F})$

وتطبيقات الإسقاط غامرة فإنه توجد $F_1 \in \mathcal{F}$ و $F_2 \in \mathcal{F}$

بحيث:

$V_1 = P_{r_1}(F_1)$ ، $V_2 = P_{r_2}(F_2)$

بما أن $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $\mathcal{F}$ مرشحة

فإن $E = F_1 \cap F_2$ من $\mathcal{F}$

نلاحظ أن

$$V_1 = P_{r_1}(F_1) \supseteq P_{r_1}(F_1 \cap F_2) = P_{r_1}(E) = E_1$$

$$V_2 = P_{r_2}(F_2) \supseteq P_{r_2}(F_1 \cap F_2) = P_{r_2}(E) = E_2$$

ومنه:

$$V_1 \times V_2 \supseteq E_1 \times E_2 \supseteq E = F_1 \cap F_2$$

ومنه:

$V_1 \times V_2$ من F كون F كل مرشحة

و $V_1 \times V_2 \supseteq E \in F$

وهذا كافٍ لتحقق المطلوب، أي $V_x \subseteq F$

حيث $x = (x_1, x_2)$ و $x \leftarrow F$

★ ★ ★

السؤال الثاني: برر صحة أو خطأ ما يلي:

(a) صف المجالات المفتوحة هو مرشحة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل:

لا، نلاحظ أن $[-1,2] \subseteq]0,1[$

(b) كل فضاء متري هو فضاء ناظمي:

الحل:

يجب إثبات أن كل فضاء متري هو T_1 و T_4

(c) كل فضاء متراص هاوسدورف يكون فضاء منتظماً.

الحل:

يجب إثبات أنه فضاء T_1 و T_3

بما أنه فضاء هاوسدورف فهو فضاء T_1، بقي إثبات أنه

فضاء T_3.

لتكن K مجموعة مغلقة غير خالية و $p \notin K$ ، وبما أن الفضاء (X,τ) متراص و K مجموعة مغلقة فإن K مجموعة متراصة.

ليكن $x \in K$ فإن $p \neq x$ وبما أن X هاوسدورفي فإنه:

$$\exists\, U_x^{(p)} \in V_x \quad \exists\, U_p^{(x)} \in V_p : U_x^{(p)} \cap U_p^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أن $K \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x^{(p)}$

أي $\{U_x^{(p)} : x \in K\}$ تغطية مفتوحة لـ K المتراصة

فمنه توجد $x_1, x_2, \dots, x_n$ من K بحيث:

$$K \subseteq U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$$

نأخذ $O_K = U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$

و $O_p = U_p^{(x_1)} \cap U_p^{(x_2)} \cap \dots \cap U_p^{(x_n)}$

تحققان المراد.

★ ★ ★

السؤال الثالث:

اذكر نص مبرهنة تيتس: ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ناظمياً، و F مجموعة جزئية مغلقة من (X,τ)، و g تطبيقاً مستمراً ما للفضاء الجزئي (F,τ_F) في فضاء الأعداد الحقيقية $(R,|\cdot|)$، عندئذ يوجد تمديد مستمر f للتطبيق g من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء $(R,|\cdot|)$.

- اذكر توطئة أوريسون، وفكرة إثباتها
(موجود في المحاضرة 16)

★ ★ ★

سؤال: (دورة)

لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية R مزودة بالتبولوجيا المولدة بالمجالات $[a, +\infty[$ عن لصاقة مجموعة قواسم العدد 721 ثم داخلها ، محيطها ، ثم هل الفضاء التبولوجي الناتج هو فضاء متراص وهل هو فضاء T_2 ؟

الحل:

- مجموعة قواسم العدد 721 هي $D=\{1,7,103,721\}$
وإن $\overline{D}=[1,\infty[$ و $D^{\circ}=\phi$ (لا توجد مفتوحة محتواة فيها)
و $Fr(D)=[1,+\infty[$

- ليس متراصاً ، مثلاً التغطية المفتوحة $\{\theta_n=]-\infty,n[: n\in N\}$ (ماذا تلاحظ)

- ليس T_2 كونه ليس T_1 ، مثلاً $x=0$ ، $y=1$ لاحظ أن أي جوار لـ y يحوي x

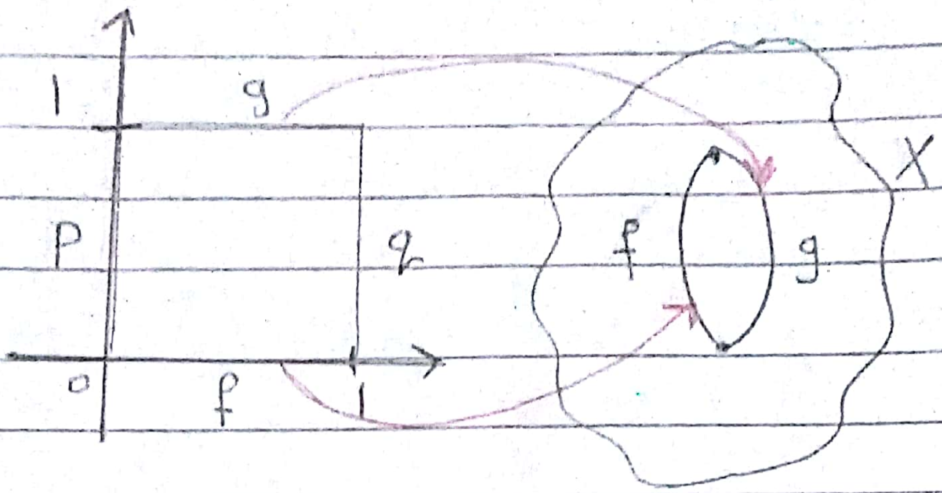
★ ★ ★

تتمة في الترابط

تعريف: ليكن $f:I\longrightarrow X$ و $g:I\longrightarrow X$ طريقين لهما نفس نقطة البداية $p\in X$ ونفس نقطة النهاية $q\in X$ نقول عن f إنه هوموتوبي لـ g إذا وفقط إذا وجد تطبيق مستمر $H:I^2\longrightarrow X$ يحقق ما يلي:

$H(s,0)=f(s) \qquad H(0,t)=p$

$H(s,1)=g(s) \qquad H(1,t)=q$



ملاحظة: علاقة هوموتوبي هي علاقة تكافؤ في جمع كل المسارات من a إلى b

الفضاءات المترابطة البسيطة.

ليكن المسار $f: I \longrightarrow X$ بنفس النقاط الأولية والنهايات $f(0)=f(1)=p$ يسمى مسار مغلق عند $p \in X$

على وجه الخصوص فإن المسار الثابت $e_p : I \longrightarrow X$ المحدد بواسطة $e_p(s)=p$ إنه مسار مغلق في p

- المسار المغلق $f: I \longrightarrow X$ يقال إنه يمكن تقليصه إلى نقطة إذا كان هوموتوبي لمسار ثابت.

تمرين: ليكن $X=\{1,2,3\}$ ،

$\tau=\{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X\}$

1) هل (X,τ) مترابط؟

2) هل $A=\{1,2\}$ مترابطة؟

3) هل $B=\{3\}$ مترابطة؟

4) هل $\{5,3\}$ مترابطة؟

5) عدد المركبات المترابطة في هذا الفضاء؟

الحل

1- لدينا المغلقات:

$\mathcal{F} = \{\phi, X, \{2,3\}, \{3\}, \{2\}\}$

$\Leftarrow$ المغلقات والمفتوحات في τ واحدة هما

X و ϕ فقط $\Leftarrow$ مترابط

2- $\tau_A = \{A \cap G , G \in \tau\} = \{\phi, A, \{1\}\}$

$\mathcal{F}_A = \{A, \phi, \{2\}\}$

$\Leftarrow$ مترابطة

3- مترابطة لأنها وحيدة العنصر

4- السؤال خاطئ لأن 5 خارج الفضاء

5- الفضاء المترابط فيه مركبة وحيدة (أكبر مركبة تحوي عناصره) $\Leftarrow$ المركبة الوحيدة هي X

END

إعداد

نذير تيناوي   رشا رويعي