نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: الفضاء المتري

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ أمثلة على الفضاءات غير التامة .

٢ – التطبيق الإيزومتري و الفضاءات الإيزومتريان .

## الدوال المستمرة :

لتكن $X$ مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ أي $X = C[0,1]$ ولنفرض أن لهذه المجموعة المترك $d$ بالشكل :

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt \qquad \forall x,y \in C[0,1]$$

ولنثبت أن هذا الفضاء غير تام بخصوص هذا المترك

## الإثبات :

((لإثبات على ذلك يكفي إيجاد متتالية كوشية ولكن غير متقاربة فيه أي أن نهاية هذه المتتالية هي عبارة عن دالة غير مستمرة على المجال $[0,1]$ ))

أن الطرف الأيمن موجود لأن $x,y$ دوال مستمرة وبالتالي جمع دوال مستمرة هي دالة مستمرة وتركيب دوال مستمرة هي دالة مستمرة وبالتالي قابلة للمكاملة

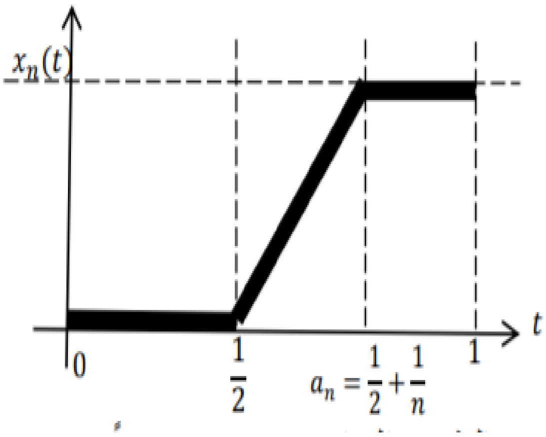
وإن الزوج $(C[a,b],d)$ هو فضاء متري ((وضوحاً))

ولنثبت أن هذا الفضاء غير تام بخصوص هذا المترك .

ومن أجل ذلك نأخذ متتالية عناصرها من $c[0,1]$ حيث تكون كوشية وغير متقاربة فيه .

ولنعرف المتتالية $(x_n)$ بالشكل التالي :

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & ; t \epsilon \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 1 & ; t \in [a_n, 1] \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$




حيث $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad ; n > 1$

أما على المجال $[\frac{1}{2}, a_n]$ فهي القطعة المستقيمة التي تجعل

تلك التوابع مستمرة

وبيانياً يكون المنحى البياني للدالة $x_n$ كالتالي:

نلاحظ أن ضمن المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ جميع المنحنيات البيانية للمتتالية

$(x_n)$ تنطبق على المحور $(ot)$ وفي المجال $[a_n, 1]$تنطبق

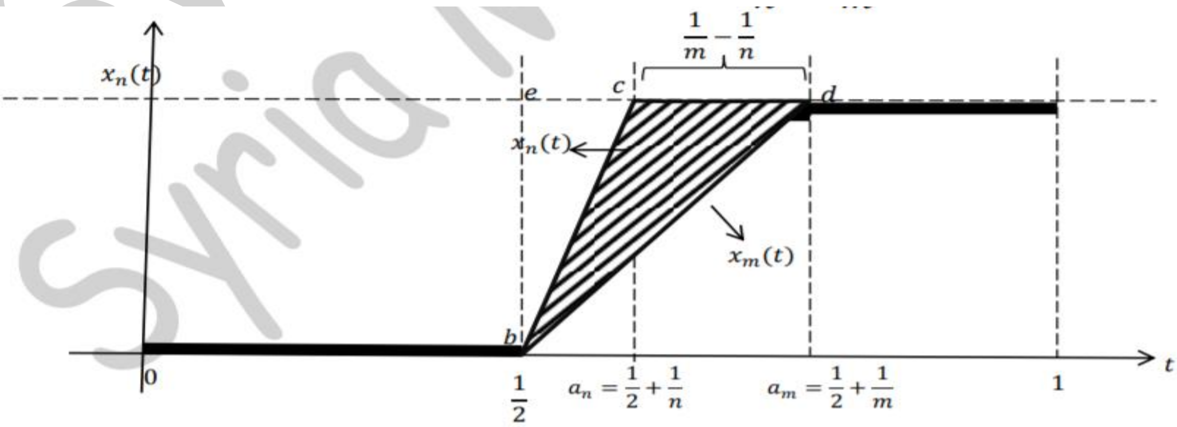
على المستقيم $x_n(t) = 1$ كما نلاحظ أن الخط البياني للدالة $(x_n)$

الذي هو عبارة عن متتالية من التوابع مستمر وضوحاً من الشكل على المجال$[0,1]$ .

ولنثبت أن هذه المتتالية كوشية أي لنبرهن أن :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists N_0 \in N \; ; n, m \geq N_0 \; : d(x_n, x_m) < \varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m)$$
$$= \int_0^1 \big|x(t) - y(t)\big| dt \; < \varepsilon$$

ولنفرض أن $n > m$ وبالتالي سيكون لدينا $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ ويكون لدينا هندسياً



$$\Rightarrow d(x_n,x_m)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t)-x_m(t)|dt$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_n(t)-x_m(t)|dt + \int_{a_m}^{1} |x_n(t)-x_m(t)|dt$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m) = \int_{a_m}^{1} |x_n(t)-x_m(t)|dt \;; x_n(t) \geq x_m(t);\ \forall t \in \left[\frac{1}{2}, a_m\right]$$

ومنه إن $d(x_n,x_m)$ تمثل مساحة المثلث $ADC$ مطروحاً منه مساحة المثلث $ADB$ وذلك :

$$d(x_n,x_m) = \frac{1}{2}(|AD| * |DC| - \frac{1}{2}(|AD| * |DB|)$$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{m} \;\dots\dots(*)$$

ولكن حسب أرخميدس :

$$\forall x,y \in R\,;\ \exists N_0 \in N : N_0, x > y$$

فإذا أخذنا $(x=1)$ , $\left(y=\frac{1}{\varepsilon}\right)$ نجد أن : $\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists N_0 \in N\,; N_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N_0} < \varepsilon$

ولتكن لدينا $n > m > N_0$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

بالتعوض في (*)نجد أن :

$$\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists N_0 \in N\,; n,m \geq N_0 : d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن المتتالية $(x_n)$ هي متتالية كوشية .

ولنبرهن إن المتالية $(x_n)$ ليست متقاربة في الفضاء $c[0,1]$

أي لنبرهن أن نهاية $x_n$هي $x$ دالة غير مستمرة على المجال $[0,1]$

بفرض أن $x$ هي نهاية المتتالية $(x_n)$ وبالتالي يكون لدينا حسب التعريف التقارب :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists N_0 \in N\ ; n \geq N_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$$

وبمعنى أخر لدينا من الفرض : $\lim\limits_{n\to\infty} : d(x_n, x) = 0$ .

ولتكن لدينا حسب تعريف المترك المعرف : $d(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt < \varepsilon$

وإن من الفرض لدينا كلاً من $x_n(t), x(t)$ دوال مستمرة وطرح دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة والقيمة المطلقة هي دالة مستمرة أيضاً والتالي فإن :

$$d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{a_n}^{1} |x_n(t) - x(t)|dt$$ و

وبالتالي لدينا حسب تعريف المتتالية (١) :

$$d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|dt$$

وبجعل $n \to \infty$ نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x(t)|dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt + \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|dt = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} |x_n(t) - x(t)|dt + \int_{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}^{1} |1 - x(t)|dt$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} |x_n(t) - x(t)|dt = 0$$ ((لأن التكامل المحدد من a إلى a يساوي ٠))

وبالتالي لدينا مجموع التكاملات غير سالبة يساوي إلى الصفر فإن لكل من التكاملات يساوي الصفر أي يكون : $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - x(t)|dt = 0$ , $\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt = 0$

وبما أن $x$ دالة مستمرة يجب أن يكون :

$$x(t) = 0 \quad ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$1 - x(t) = 0 ; \frac{1}{2} < t \leq 1$$

$$0 \ ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$1 \ ; \frac{1}{2} < t \leq 1$$

نلاحظ أن $x$ هي دالة منقطعة غير مستمرة على المجال $[0,1]$ وهذا يعني أن $x \notin [0,1]$ وبالتالي فإن الفضاء $c[0,1]$ غير تام بخصوص المترك المعرف عليه .

- وجدنا سابقا وجود فضاءات تامة وأخرى غير تامة ،إن كل فضاء متري غير تام له متمم ومثال على ذلك الفضاء $Q$ غير تام الذي يمكن توسيعه إلى $R$ .

## التطبيق الإيزومتري (متساوي المسافات ) :

ليكن لدينا $X = (X, d)$ و $Y = (Y, d)$ فضائين مترين ولدينا التطبيق $T: x \to y$ عندئذ نقول عن التطبيق $T$ أنه إيزومتري إذا حافظ $T$ على لمسافة أي أنه :

$$d(x, y) = d^{\sim}(T_x, T_y) \dots \dots (*)$$

((حيث أن $T_x, T_y$ صور لكل من $x\ ,y$ وفق $T$ على الترتيب ))

**ملاحظة :**

إن كلاً من طرفي المساواة السابقة (*) موجود حيث تتم هذه المقارنة في $R$

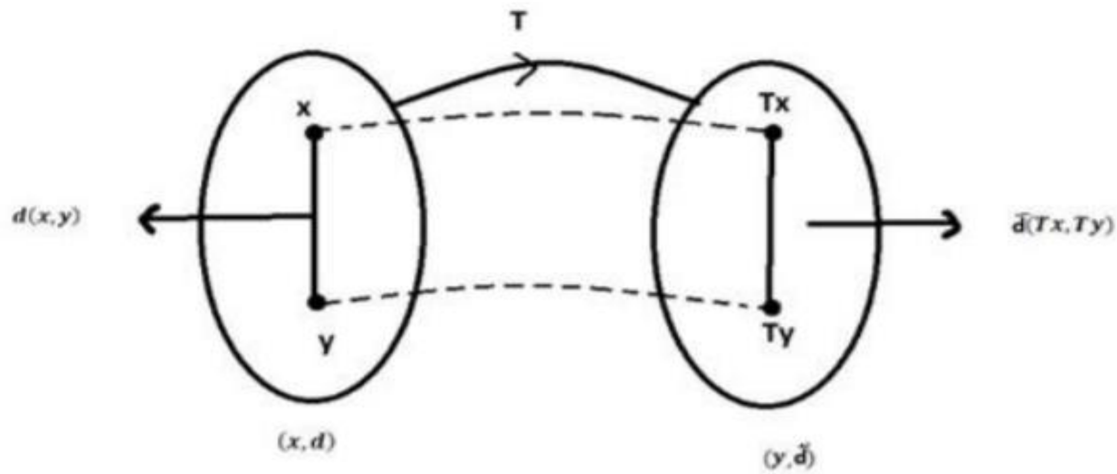
وليس بالضرورة أن يكون المترك المعرف على $X$ هو نفسه المعرف على $Y$ .

## الفضاءان الإيزومتريان :

نقول عن $x\ ,y$ أنهما إيزومتريان فيما بينهما إذا وجد تطبيق $T$ إيزومتري .

## ملاحظة :

لذلك فإن الفضاءات الإيزومتريان قد يختلفان على الأكثر بطبيعية عناصرها ولكنه لا يمكن تمير أحدهما عن الأخر من وجهة نظر المترك وبالتالي فإنه يمكن اعتبار الفضاءين الإيزومترين متطابقين




## مبرهنة الإتمام (بدون برهان):

-يوجد لكل فضاء متري $X = (X,d)$ فضاء متري تام $X^{\sim} = (X^{\sim},d^{\sim})$ يحوي فضاءً جزئياً $w$ وكثيفاً في $X$ .

إن هذا الفضاء $X^{\sim}$ وحيد إذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الإيزومترية معه ، بمعنى أخر إذا كان $X^{\sim}$ فضاء متري تام يحوي فضاءاً جزئياً كثيفاً $w$ ايزومترياً مع $X$ فإن الفضائيين $X^{\sim}$ و $X$ إيزومتريان

(( وذلك بالاعتماد على الملاحظة السابقة حيث يمكن اعتبار $X^{\sim}$ و $X^{-}$ منطبقين ))

انتهى الفصل الأول .

**انتهت المحاضرة**

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – رشا قرصة