نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : التاسعة عشرة ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات المنشطرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـمبرهنات

مبرهنة : إذا كانت $(3) \ldots.. 0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ متتالية تامة فإن القضيتين متكافئتان :

١- المتتالية (٣) منشطرة من اليمين

٢- $Kerg$ حد مكمل مباشر في N

البرهان :

$(1) \Leftarrow (2)$ لنفرض أن المتتالية (٣) منشطرة من اليمين وليكن $\pi: \rho \to N$ تشاكل منشطر بحيث :

$$go\pi = I_P \ldots..(*)$$

من جهة ثانية $\forall n \in N$

$$g\big(n - (\pi og)(n)\big) = g(n) - g\big(\pi og(n)\big)$$

$$g(n) - (go\pi)\big(g(n)\big)$$

من $(*) \Leftarrow g(n) - I_P \,.\, g(n) = g(n) - g(n) = 0$

$$\Rightarrow g\big(n - (\pi og)(n)\big) = 0$$

$$n - (\pi og)(n) \in Kerg$$

ومن ثم إن :

$$(\pi og)(n) = \pi\big(g(n)\big) \in Im\pi$$

$$\Rightarrow n \in Im\pi + Kerg$$

$$\Rightarrow N = Im\pi + Kerg$$

لإثبات أن المجموع مباشر يجب برهان

$$Im\pi \cap Kerg = 0$$

$$x \in Im\pi \cap Kerg$$

أي $x \in Im\pi \;\; \exists p \in P : \pi(p) = x$

$$x \in Kerg \;\; : g(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \overset{\pi(p)=x}{=} g(\pi(p)) = (go\pi)(p) = I_P(p) = p$$

$$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow \pi(0) = x \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow Im\pi \cap Keg = 0$$

$$\Rightarrow N = Im\pi \oplus Kerg$$

$(2) \Leftarrow (1)$ لنفرض أن $Kerg$ حد مكمل مباشر في N عندئذ يوجد A مودول جزئي من N

بحيث : $N = Kerg \oplus A$ من اجل $n \in N$ فإن n تكتب على شكل وحيد

$$x \in Kerg \;\; : \;\; a \in A$$

$$n = x + a \ldots\ldots (1)$$

لنأخذ g_A مقصور التشاكل المودولي g على A

نصور (١) ب g :

$$g(n) = g(x + a) = g(x) + g(a) = g(a)$$

و g_A متباين وذلك لانه إذا كان $a \in Kerg_A$ ومنه $g_A(a) = 0$

$$\Rightarrow a \in Kerrg$$

وبما ان $a \in A$ فإن $a \in A \cap Kerg$ كون N تكتب على شكل مجموع مباشر لمودولين A و $Ker\, g$

$$N = A \oplus Kerg$$

$$\Rightarrow a = 0$$

فإن g_A متباين

وهو غامر وهو تشاكل مودولي عندئذ :

$$g_A: A \to P$$

تماثل مودولي بحيث $g_A o g_A^{-1} = I_A$ وكون (٣) تامة و g غامر فإنه يوجد دوما تشاكل :

$$\pi: P \to N$$

بحيث يحقق $g o \pi = I_P$ ومنه فإن π تشاكل منشطر فإن المتتالية (٣) منشطرة من اليمين

ملاحظة : إذا كانت المتتالية التامة :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

منشطرة من اليسار واليمين وكان ρ التشاكل المنشطر من اليسار و π التشاكل المنشطر من اليمين فإن :

$$Imf \oplus Ker\rho = N = Kerg \oplus Im\pi$$

وإن π, f متباين وبالتالي حسب مبرهنة التماثل الأولى

$$P = Im\pi \quad , \qquad M \cong Imf$$

ولدينا بالفرض : $Kerg = Imf$

وبالتالي $N = Imf \oplus Ker\rho \cong M \oplus Ker\rho$

لكن $Ker\rho = Im\pi$

ومنه $N \cong M \oplus P$ إذا فالمتتالية :

$$0 \to M \to M \oplus P \to P \to 0$$

تامة ..

تعريف: ليكن M_1, M_2 مودوليين جزئيين من المودول M على الحلقة R وليكن $M = M_1 \oplus M_2$ عندئذ $\forall m \in M$ فإنه يكتب بالشكل الوحيد :

$$m = m_1 + m_2 \quad : \quad m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$$

ونسمي التطبيق

$$P: M \to M_1$$

$$m \mapsto m_1$$

الاسقاط على M_1 موازي ل M_2

تعريف : ليكن M مودولا على الحلقة R نقول عن التشاكل $f: M \to M$

أنه جامد إذا كان $fof = f$

مبرهنة : إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ (حيث M مودول على حلقة R وحيث M_1, M_2 مودولين جزئيين من M)

وكان $f: M \to M_1$ إسقاط M_1 موازٍ ل M_2 فإن القضايا الآتية صحيحة :

١- $M_1 = Imf = \{x \in M : f(x) = x\}$
٢- $M_2 = Kerf$
٣- f جامد

١) إن $Imf = M_1$ من التعريف ويجب إثبات أن

$$M_1 = Imf = \left\{\underbrace{x \in M: f(x) = x}_{A}\right\}$$

أي علينا إثبات أن $M_1 \subseteq A$ و $A \subseteq M_1$ (يترك للطالب)

٢) $\forall m \in M$ فإن m يكتب بشكل وحيد :

$$m = m_1 + m_2; m_1 \in M_1 , m_2 \in M_2$$

ولدينا $f(m) = m_1$ $\Leftarrow$

$$\{f(m) = 0 \Leftrightarrow \{m_1 = 0\} \Leftrightarrow \{m = m_2 \in M_2\}$$

إذا $Kerf = M_2$

٣) $\forall m \in M$ فغن $f(m) = m_1$ وبالتالي فإن

$$(fof)m = f\big(f(m)\big) = f(m) = m_1 = f(m)$$

إذا $fof = f$ أي انه جامد ..

انتهت المحاضرة : إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف