◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة السابعة عشر و الثامنة عشر

عنوان المحاضرة: دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- الانتقال بمتغير عشوائي (منقطع) ، (مستمر) .

٢- الانتقال بشعاع عشوائي (منقطع) ، (مستمر) .

٣- بعض التمارين

تمرين عن حالة الشعاع العشوائي المستمر : ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} & 0<x,y<\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- أثبت أن $f_{XY}(x,y)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ (X,Y)

٢- أوجد دالتي الكثافة الهامشية f_X, f_Y

٣- هل X, Y مستقلان عشوائياً

٤- أوجد دالتي التوزيع الهامشيتين F_X, F_Y

٥- أوجد دالة التوزيع المشتركة F_{XY}

٦- احسب $P(0<X<\infty\ ,0<Y<\infty)$

الحل :

١- نلاحظ أن $f(x,y)\geq 0\ \forall x,y\in R$ كما أن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-y}\,dxdy=[-e^{-x}]_0^{\infty}[-e^{-y}]_0^{\infty}=1$$

فهي دالة كثافة فعلية

-٢

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-x-y}dy = -[-e^{-x-y}]_0^{\infty} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & : 0 < x < \infty \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و بالمثل :

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & : 0 < y < \infty \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

-٣ نلاحظ أن $f_X(x).f_Y(y) = e^{-x}e^{-y} = e^{-x-y} = f_{XY}(x,y)$

و بالتالي X, Y مستقلان عشوائياً

-٤

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_o^{x} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & : 0 < x < \infty \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و بشكل مماثل نجد أن :

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_o^{y} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^y = 1 - e^{-y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & : 0 < y < \infty \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

-٥ نوجد دالة التوزيع المشترك :

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$= \int_{0}^{x}\int_0^{y} e^{-u-v}dudv = \int_0^x [-e^{-u-v}]_0^y dv$$

$$= \int_0^x e^{-v}(-e^{-y}+1)dv = (1-e^{-y})[-e^{-v}]_0^x = (1-e^{-y})(1-e^{-x})$$

$$\Rightarrow F_{XY}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & 0 < x,y < \infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

٦- الآن :

$$P\left(0 < x < \infty, 0 < y < \frac{x}{3}\right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{x}{3}} e^{-x-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} [-e^{-x-y}]_0^{\frac{x}{3}} dx = \int_0^{\infty} \left[-e^{-\frac{4x}{3}} + e^{-x}\right] dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}e^{-\frac{4x}{3}} - e^{-x}\right]_0^{\infty} = \left[-\frac{3}{4} + 1\right] = \frac{1}{4}$$

الفصل الخامس : دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

الانتقال بمتغير عشوائي منقطع

ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) مجموعة قيمه : $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

وله الكثافة الاحتمالية : $f_X(x) = P(X = x);\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

وليكن Y متغيراً مرتبطاً بـ X بالعلاقة $Y = U(X)$ عندئذٍ يمكن حساب مجموعة قيم Y ، وكذلك كثافته بالحساب المباشر : $f_Y(y) = P(Y = y_i) = P(U(X) = y_i) = P\left(X = U^{-1}(y_i)\right) = f_X\left(U^{-1}(y_i)\right)$

مثال : ليكن $\boldsymbol{X}$ متغيراً عشوائياً منفصلاً جدول كثافته الاحتمالية يعطى بالشكل :

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.15	0.20	0.20	0.15	0.30

عين جدول احتمال المتحول $Y = (X-2)^2$

الحل :

نوجد مجموعة قيم Y أي R_Y

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$$
$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$$
$$x_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 0$$

$$x_4 = 3 \Rightarrow y_4 = 1$$
$$x_5 = 4 \Longrightarrow y_4 = 4$$

و بالتالي $R_Y = \{0,1,4\}$

و الاحتمالات المقابلة للقيم :

$$P(Y = 0) = P(X = 2) = 0.20$$
$$P(Y = 1) = P(X = 1 \; or \; X = 3) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0.20 + 0{,}15$$
$$= 0.35$$

$$P(Y = 4) = P(X = 0) + P(X = 4) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$$

و عليه جدول الاحتمال لـ Y يكون :

Y	0	1	4	المجموع
$f_Y(y)$	0.20	0.35	0.45	1

مثال (1) ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول التوزيع (الكثافة) التالي :

X	-1	-2	-3	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير : $Y = |X|$

الحل نلاحظ أنَّ مجموعة قيم Y هي $\mathbb{R}_Y = \{1,2,3\}$ و $\mathbb{R}_X = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$

$$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = +1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$f_Y(2) = P(Y = 2) = P(X = -2) + P(X = +2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$f_Y(3) = P(Y = 3) = P(X = -3) + P(X = +3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Y	1	2	3	المجموع

$f_Y(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

مثال (2) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(\mu^x . e^{-\mu})}{x!} & ; \ x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

، عين دالة الكثافة لِـ $Y = 4X$

الحل

$Y = 4X = U(x) \Rightarrow X = \frac{Y}{4} = U^{-1}(Y)$ ، فإنَّ مجموعة قيم X هي :

$\mathbb{R}_X = \{0,1,2, \dots\}$ فتكون مجموعة قيم المتغير Y هي : $\mathbb{R}_Y = \{0,4,8,12, \dots\}$ وتكون دالة الكثافة لِـ Y :

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(4X = y) = P\left(X = \frac{y}{4}\right) = f_X\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{\mu^{\frac{4}{y}} . e^{-\mu}}{\left(\frac{y}{4}\right)!}$$

أي أنَّ :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{(\mu^{\frac{4}{y}} . e^{-\mu})}{\left(\frac{y}{4}\right)!} & ; \ y = 0,4,8, \dots \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الانتقال بمتغير عشوائي مستمر

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ ، وليكن $Y = U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X

عندئذٍ يكون Y متغيراً عشوائياً مستمراً وكثافته تتعين بالعلاقة : $f_Y(y) = f_X\big(U^{-1}(y)\big) . |(U^{-1}(y))'|$

بحيث : $\left(U^{-1}(y)\right)' = X'_y$ ، مشتق X بالنسبة لِـ Y

مثال (1) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير : $Y = -2 \ln X$

الحل إنَّ $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية للمتغير X ، لأنَّ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = \int_0^1 (1).dx = [x]_0^1 = 1$$

$$Y = U(X) = -2\ln X \Rightarrow \frac{Y}{-2} = \ln X \Rightarrow X = e^{-\left(\frac{Y}{2}\right)} = U^{-1}(Y)$$

$$\left(U^{-1}(y)\right)'_y = X'_y = \left(e^{-\frac{y}{2}}\right)'_y = -\frac{1}{2}.e^{-\frac{y}{2}}$$

وعندما : $0 < X < 1 \Rightarrow 0 < Y < +\infty$

ونعلم أنَّ : $f_Y(y) = f_X\left(U^{-1}(y)\right).\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| \dots.(*)$

وإنَّ : $\left|\left(U^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, f_X\left(U^{-1}(y)\right) = 1$

نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد : $f_Y(y) = 1.\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ ومنه تكون دالة الكثافة لِ Y هي :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & ; 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (2) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

عين كثافته : $Y = X^2$

الحل

$$Y = U(X) = X^2 \Rightarrow X = U^{-1}(Y) = \pm\sqrt{Y}$$

الآن نحسب : $|U^{-1}(Y)'| = \left|\pm\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty$$

$$f_X\left(U^{-1}(y)\right) = f_X\left(\pm\sqrt{y}\right) = P[X = \pm x] = P[X = x] + P[X = -x]$$

$$= f_X\left(-y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+y^{\frac{1}{2}}\right)$$

نطبق العلاقة لإيجاد $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = f_X\big(U^{-1}(y)\big).\left|\big(U^{-1}(y)\big)'\right| = \left[f_X\left(-Y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+Y^{\frac{1}{2}}\right)\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}e^{-Y^{\frac{1}{2}}}\right]\left(\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-y^{\frac{1}{2}}}}{2y^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

ومنه يكون :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & ;\ 0 < y < +\infty \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (3) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ;\ -1 \le x \le 1 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير : $Y = X^2$

الحل $X = U^{-1}(Y) = \pm Y^{\frac{1}{2}}$ و $Y = U(X) = X^2$

نلاحظ أنَّ $-1 \le x \le 1$ فيكون $0 \le y \le 1$

نحسب المشتق $\big(U^{-1}(y)\big)' = \pm\frac{1}{2}.y^{-\frac{1}{2}}$ ، نأخذ القيمة المطلقة للمشتق $\left|\big(U^{-1}(y)\big)'\right| = \frac{1}{2}.y^{-\frac{1}{2}}$

نطبق العلاقة لإيجاد دالة الكثافة لـ Y : $f_Y(y) = f_X\big(U^{-1}(y)\big).\left|U^{-1}(y)\right|$

$$= \left[f_X\left(-y^{\frac{1}{2}}\right) + f_X\left(+y^{\frac{1}{2}}\right)\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right].\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

فتكون لـ Y الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & ;\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الانتقال بشعاع عشوائي منقطع (منفصل)

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(X,Y)$

حيث :

$$f(x,y) = P[X = x, Y = y]$$

$$\mathbb{R}_X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \ \text{و} \ , \qquad \mathbb{R}_Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$$

ولنفرض أنّه هناك متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين بدلالة X و Y من خلال العلاقة :

$$U = \psi_1(X,Y) \ , \ V = \psi_2(X,Y)$$

بحيث أنَّه يمكن حساب X و Y بدلالة U و V ، بالشكل :

$$X = w_1(U,V) \quad , \quad Y = w_2(U,V)$$

تعطى بالعلاقة : $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(w_1(u,v), w_2(u,v)\big)$

ومجموعة قيم الشعاع (U,V) :

$$(u_i, v_j) = \Big(\psi_1\big(x_i, y_j\big) , \psi_2\big(x_i, y_j\big)\Big)$$

ومجموعة قيم الشعاع (u,v) :

$$\mathbb{R}_u = \{u_1, \dots, u_n, \dots\} \quad , \quad \mathbb{R}_v = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$$

ويكون $P[U = u_i \, , V = v_i] = P[X = w_1(u_i, v_i) \ , \ Y = w_2(u_i, v_i)]$

مثال (1) ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \times P_1^x . P_2^y (1 - P_1 - P_2)$$

حيث : $y = 0,1,2, \dots, n$; $x = 0,1,2, \dots, n$; ويكون : $0 \le x + y \le n$

ولنعرف المتغيرين $V = \frac{X}{X+Y}$, $U = X + Y$ ، والمطلوب : عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل لدينا $U = \psi(X,Y) = X + Y \ , \ V = \psi(X,Y) = \frac{X}{X+Y}$

بحل المعادلتين السابقتين حل مشترك نجد أنَّ :

$$X = w_1(U,V) = U.V \quad ، \quad Y = w_2(U,V) = U.(1-V)$$

فتكون الكثافة المشتركة للشعاع (U,V) هي :

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(U.V\,, U(1-V)\big)$$

$$= \frac{n!}{(u.v)!(u(1-v))!(n-u)!} P_1^{u.v} . P_2^{u(1-v)} (1-P_1-P_2)^{n-u}$$

حيث : $u.v = 0,1,\dots,n \;;\; u(1-v) = 0,1,\dots,n \;;\; 0 \le u \le n$

الانتقال بشعاع عشوائي مستمر

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ ، وليكن المتغيرين :

$$U = \varphi_1(X,Y)\,,\; V = \varphi_2(X,Y)$$

حيث: $Y = \psi_2(U,V)$, $X = \psi_1(U,V)$ عندئذٍ فإنَّ كثافة الشعاع (U,V) ، تعطى بالعلاقة

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(\psi_1(u,v)\,,\psi_2(u,v)\big).|J|$$

حيث: $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ و يمكن إيجاده بطريقة ثانية $|J(u,v)| = \frac{1}{|J(x,y)|}$

مثال (2) ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & ; \quad 0 < x < 3 \;, 0 < y < 4 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ المتغيرين $V = X + Y$, $U = \frac{4X}{3Y}$ ، والمطلوب : عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل لدينا $V = \varphi_2(X,Y) = X + Y$, $U = \varphi_1(X,Y) = \frac{4X}{3Y}$

وبالحل المشترك نجد أنَّ :

$$X = \psi_1(U,V) = \frac{3VU}{3U+4} \quad ; \quad Y = \psi_2(U,V) = \frac{4V}{3U+4}$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{12v}{(3u+v)^2} & \frac{3u}{3u+4} \\ \frac{-12v}{(3u+4)^2} & \frac{4}{3u+4} \end{vmatrix} \Rightarrow J = \frac{12v}{(3u+4)^3}$$

ولدينا : لحساب قيم $u \,, v$

$$y = \frac{4v}{3u+4} \;; 0 < y < 4 \Rightarrow 0 < \frac{4v}{3u+4} < 4 \;\Rightarrow 0 < v < 3u+4$$

ولدينا :

$$x = \frac{3vu}{3u+4} \;; 0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{3vu}{3u+4} < 3 \;\Rightarrow 0 < u.v < 3u+4$$

أيضاً نجد أنَّ :

$$f_{X,Y}\big(\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)\big) = f_{X,Y}\left(\frac{3vu}{3u+4}, \frac{4v}{3u+4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y).|J| = \frac{1}{12}.\frac{12v}{(3u+4)^3}$$

$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{v}{(3u+4)^3} \;; & 0 < v < 3u+4 \,, 0 < u.v < 3u+4 \\ 0 \qquad ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

كل صباح أخبر قلبك أنَّه يستحق الفرح ...

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – نهى الحبشية