نظرية الاحتمالات

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة التاسعة عشر

عنوان المحاضرة : الصفات العددية للمتغيرات و الأشعة العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع / مستمر و لدالة في متغير عشوائي منقطع / مستمر

٢ـ التوقع الرياضي لدالة في متغيرين عشوائيين

٣ـ العزوم و العزم المركزي

الفصل السادس :الصفات العددية للمتغيرات و الأشعة العشوائية

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع و لدالة في المتغير العشوائي المنفصل

تعريف : ليكن لدينا Y متغيراً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ، عندئذٍ نعرف التوقع الرياضي لـ Y بالشكل : $E(Y)=\sum_{y\in R_y} yf_Y(y)$ من أجل كل القيم لـ Y و ذلك بشرط أنّ $\sum_{y\in R_y}|y|f_Y(y)<\infty$ ، أي أننا نقول أن توقع Y موجود إذا كان $\sum_{y\in R_y}|y|f_Y(y)<\infty$

ملاحظة : إن $E(Y)$ يمثل متوسط القيم التي يأخذها Y على المدى الطويل ، أي متوسط من القياسات الموافقة لـ Y ، إذا كررنا التجربة عدد كبير من المرات ، و أيضاً تمثل قيم $E(Y)$الموقع على المحور ox و التي يتمركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ Y ، و لذلك هذه القيمة تسمى متوسط التوزيع الاحتمالي

مثال : ليكن Y متغيراً عشوائياً جدول كثافته :

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

احسب $E(Y)$

الحل : $E(Y)=\sum_{y\in R_y} y f_Y(y)=0\left(\frac{1}{8}\right)+1\left(\frac{3}{8}\right)+2\left(\frac{3}{8}\right)+3\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{12}{8}=1.5$

تعريف : : ليكن لدينا Y متغيراً عشوائياً منقطعاً دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ، و لتكن $g(Y)$ دالة في Y عندئذٍ نعرف التوقع الرياضي لـ $g(Y)$ بالشكل : $E\big(g(Y)\big)=\sum_{y\in R_y} g(y)f_Y(y)$ من أجل كل القيم لـ Y و ذلك بشرط أنّ $\sum_{y\in R_y}|g(y)|f_Y(y)<\infty$

مثال : في المثال السابق احسب $E(Y^2)$:

$$E(Y^2)=\sum_{y\in R_y} y^2 f_Y(y)=0^2\left(\frac{1}{8}\right)+1^2\left(\frac{3}{8}\right)+2^2\left(\frac{3}{8}\right)+3^2\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{24}{8}=3$$

مثال : ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته :

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(x+1)} & : x=1,2,3,\dots\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

هل لـ X توقع رياضي ؟ و منته ؟

الحل :

$$\mathrm{E(X)}=\sum x f(x)=\sum x\frac{1}{x(x+1)}=\sum\frac{1}{x+1}=\infty$$

كونها متسلسلة متباعدة و بالتالي ليس لـ X توقع منتهٍ

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر و لدالةٍ فيه

تعريف : ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ و $g(X)$ دالة في X عندئذٍ يكون

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \quad , \quad E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

و يكون كل من هذين التوقعين موجوداً إذا كان

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < \infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$$

مثال : ليكون Y متغيراً عشوائياً له الكثافة :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y \in [2,5] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $E(Y), E(Y^2), E(Y+1)$

الحل :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_2^5 \frac{y}{3} dy = 3.5$$

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_2^5 \frac{y^2}{3} dy = 13$$

$$E(Y+1) = \int_{-\infty}^{\infty} (y+1) f_Y(y)dy = \int_2^5 (y+1)\left(\frac{1}{3}\right) dy = 4.5$$

خواص التوقع :

١- ثابت حقيقي $E(c) = c \quad ,\forall c \in R$

٢- $E(cX) = cE(X)$

الإثبات :

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{+\infty} cx f_X(x)dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = cE(X)$$

٣- $E\left(\sum_{i=1}^{k} g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(g_i(X)\right)$

٤- $|E(X)| \leq E(|X|)$

٥- إذا كان $a \leq X \leq b$ فإن $a \leq E(X) \leq b$

الإثبات : (في حالة الاستمرار)

$$a \leq x \leq b$$
$$\Longrightarrow af_X(x) \leq xf_X(x) \leq bf_X(x)$$
$$\Longrightarrow a \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \leq b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$
$$\Longrightarrow a \leq E(X) \leq b$$

٦- إذا كان $X \geq 0$ فإن $E(X) \geq 0$

٧- إذا كان X, Y متغيرين عشوائين توقعهما موجود فإنه إذا كان $X \leq Y$ فإن $E(X) \leq E(Y)$

٨- $E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$

٩- إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية و لكل منها توقع موجودو أيضاً توقع $\prod_{i=1}^{n} X_i$ فإن
$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

١٠- إن عكس المبرهنة ٩ غير صحيح بالضرورة أي أنه من الممكن أن يكون توقع جداء متحولات عشوائية يساوي جداء توقعاتها دون أن تكون هذه المتحولات مستقلة

١١- $E(X^2) \neq \left(E(X)\right)^2$

تمرين: ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية : $f_Y(y) = \frac{y}{10} : y = 1,2,3,4$

أثبت أن $f_Y(y)$ دالة كثافة فعلية ثم عين $E\left(Y(Y-5)\right)$

الحل:

(إثبات الكثافة يترك للقارئ)

$$E\left(Y(Y-5)\right) = E(Y^2 - 5Y) = E(Y^2) - 5E(Y)$$

$$E(Y) = \sum y f(y) = \sum_{i=1}^{n} y\left(\frac{y}{10}\right) = \frac{1+4+9+16}{10} = 3$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 f(y) = \sum_{i=1}^{n} y^2\left(\frac{y}{10}\right) = \frac{1+8+27+64}{10} = 10$$

$$\Rightarrow E\big(Y(Y-5)\big) = 10 - 5(3) = -5$$

العزوم

تعريف : ليكن Y متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ و ليكن $r \geq 1$ عدداً صحيحاً ، إذا وجد لـ y^r توقعاً فإننا ندعوه "العزم من المرتبة r " و يعطى بالصيغة :

$$m_r := E(Y^r) = \begin{cases} \sum_y y^r f_Y(y) & \text{منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_Y(y)dy & \text{مستمر } Y \end{cases}$$

نلاحظ أنه من أجل $r = 1$ نحصل على التوقع $\mu = E(Y)$

نتيجة : بما أن $|Y|^{r-1} = |Y|^r$ فهذا يعني أنه إذا وجد العزم من المرتبة r فإن العزوم من المرتبة الأصغر من r تكون موجودة بسبب تحقق شرط التوقع :

$$E|Y|^{r-1} \leq E|Y|^r \leq \infty$$

تعريف العزم المركزي من المرتبة r

و هو العزم من المرتبة r حول $\mu = E(Y)$ و يعطى بالعلاقة :

$$E\big(Y - E(Y)\big)^r = E(Y-\mu)^2 := \begin{cases} \sum_y (y-\mu)^r f_Y(y) & \text{منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^r f_Y(y)dy & \text{مستمر } Y \end{cases}$$

مثال : ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافتح :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & : 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

احسب $E(Y^r)$ و استنتج $E(2Y+1)^2$

الحل :

نلاحظ أن Y متغير عشوائي مستمر و بالتالي:

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_Y(y)\, dy = \int_{0}^{1} y^r 2(1-y) dy = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

$$E(2Y+1)^2 = E(4Y^2+4Y+1) = 4E(Y^2) + 4E(Y) + 1$$

$$= r\left(\frac{2}{(2+1)(2+2)}\right) + 4\left(\frac{2}{(1+1)(1+2)}\right) + 1 = 3$$

انتهت المحاضرة

كل صباح أخبر قلبك أنَّه
يستحق الفرح ...

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – نهى حبشية