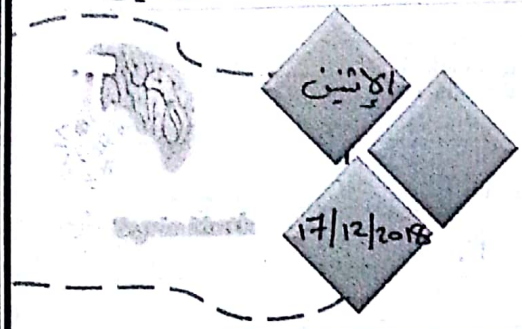
مقرر: المعادلات التكاملية وحساب التحولات ..

السنة الرابعة اختصاص تحليل



المحاضرة (28) و(27) والأخيرة

نظري
عملي

◄ دكتور المادة: محمد منصف الحمد

◄ عنوان المحاضرة: حساب التحولات ...

معادلات أولر لاغرانج للقانونية:

ليكن: $J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n')\, dx$ ... (1)

وهيئ: $y_i(a) = A_i \quad \wedge \quad y_i(b) = B_i \quad ; \quad i = \overline{1,n}$

وإذاً معادلات أولر لاغرانج هي:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

هي جملة مكونة من n من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، حلها يعطي منحنيات التوقف أو المنحنيات الحرجة التي يكون للتابعي J قيم متطرفة عليها.

لتسهيل حل تلك المعادلات بالتعبير عنها كنظام يتكون من (2n) من المعادلات تفاضلية ذات الرتبة الأولى، دون التأثير على طبيعة المسائل أو المشاكل التي نعالجها:

أ- نفرض أن: $p_i = F_{y_i'} \quad ; \quad i = \overline{1,n}$

حيث p_i المتغير المرافق للمتغير y_i أو المتحولات القانونية

ب- نعرف دالة هميلتون H تسمى دالة هاملتون مرافقة (1) وهيئ:

$$H(x, y_1, \dots y_n, p_1, \dots p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - F(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2', \dots y_n')$$

حيث $y_1' = \varphi_1$ و $y_n' = \varphi_n$

ج- نفاضل الطرفين:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i\, dy_i' + y_i'\, dp_i\right) - F_x\, dx - \sum_{i=1}^{n} \left(F_{y_i} dy_i + F_{y_i'} dy_i'\right)$$

حيث $p_i = F_{y_i'}$

WhatsApp : 0997378154
Facebook_Page : IOM
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

$$= -F_x dx + \sum_{i=1}^{n} (y_i' dp_i - F_{y_i} dy_i)$$

إذاً:

من معادلة "أولر لاغرانج" $\begin{cases} -F_{y_i} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \quad \text{و} \quad y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\dfrac{dp_i}{dx} = H_{y_i} \quad \text{و} \quad y_i' = H_{p_i} \end{cases}$; $i = \overline{1,n}$ وعليه فإن:

أي بأخذ المشتقات الجزئية للدالة الهاملتون نجد معادلات أولر لاغرانج القانونية:

$$H_{p_i} = y_i' \quad \wedge \quad H_{y_i} = -p_i' \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

وهي نظام مكون من $(2n)$ من المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.

يطلق عليها اسم معادلات أولر لاغرانج القانونية الخاصة للدالي $J[y_1, \dots, y_n]$

وتحل تلك المعادلات باستخدام الحبر الخطي أو غيرها من الطرق فنحصل على منحنيات لتوقف الدالي J.

مثال محلول: أوجد منحني لتوقف الدالي:

$$J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + y^2)\, dx$$

طريقة الحل: بما أن $F(y, y') = y'^2 + y^2$ معادلة أولر لاغرانج هي:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

$$y'' - y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية متجانسة مرتبة ثانية ذات أمثال ثابتة ومعادلتها المميزة:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftarrow \lambda = \pm 1$$

الحل العام:

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

لإيجاد معادلات أولر لاغرانج للتابولية للدالي $J[y]$

1- نفرض أن:

$$p = F_{y'}$$

$$p = 2y' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{p}{2}}$$

2- نشكل دالة هاملتون:

$$H(x,y,p) = py' - F(y,y')$$

$$= p\cdot\frac{p}{2} - \left(\frac{p^2}{4} + y^2\right) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} - y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{H(x,y,p) = \frac{p^2}{4} - y^2}$$

3- معادلات أولر لاغرانج للتابولية المرافقة للدالي $J[y]$:

$$H_p = y' \Rightarrow \frac{p}{2} = y'$$

$$H_y = -p' \Rightarrow -2y = -p'$$

$$\begin{cases} y' = \frac{p}{2} & \dots (1) \\ p' = 2y & \dots (2) \end{cases}$$

هي جملة مكونة من معادلتين تفاضليتين كل منهما من الرتبة الأولى.

من (1) $p = 2y' \Rightarrow p' = 2y''$

نعوض في (2) فنجد:

$$2y'' = 2y \Rightarrow 2y'' - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y'' - y = 0$$

معادلة الميزة $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

حلول المعادلة $y = Ae^{x} + Be^{-x}$ هي حل المعادلة أويلر لاغرانج.

تمرين: باستخدام معادلات أويلر لاغرانج المقابلة، أوجد مقترنات لتوقف لكل مما يأتي:

$$J(y) = \int \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\, dx$$

أ- نسمي p المتغير المرافق للمتغير y ونعلم أنه يعطى بالشكل:

$$p = F_{y'} = \frac{2(x^2+y^2)\cdot y'}{2\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}} \Rightarrow \boxed{p = \frac{(x^2+y^2)\cdot y'}{\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}}} \quad *$$

3- معادلات أويلر لاغرانج المقابلة:

$$H_p = y' \Rightarrow \frac{-(-2p)}{2\sqrt{x^2+y^2-p^2}} = y' \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} = y'$$

$$H_y = -p' \Rightarrow -\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2-p^2}} = -p' \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} = p'$$

نظام مكون من معادلتين تفاضليتين كل منهما من الرتبة الأولى.

$$\frac{dy\sqrt{x^2+y^2-p^2}}{p} = dx \quad \dots(1)$$

$$\frac{dp\sqrt{x^2+y^2-p^2}}{y} = dx \quad \dots(2)$$

نكتب الحالة بالشكل النظامي:

$$\frac{dy\sqrt{x^2+y^2-p^2}}{p} = \frac{dp\sqrt{x^2+y^2-p^2}}{y} = \frac{dx}{1}$$

[1] [2] [3]

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

من النسبة الأولى والثانية:

$$\frac{dy}{P} = \frac{dP}{y}$$

$$y\,dy = P\,dP \Rightarrow y^2 = P^2 + C \quad ...(*)$$

من النسبة الأولى والثالثة:

$$\frac{dy\sqrt{x^2+y^2-P^2}}{P} = \frac{dx}{1} \overset{(*)\text{من}}{\Rightarrow} \frac{dy\sqrt{x^2+C}}{P} = \frac{dx}{1}$$

$$\frac{dy}{P} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} \overset{(*)\text{من}}{\Rightarrow} \frac{dy}{\sqrt{y^2-C}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}$$

وهي معادلة تفاضلية مرتبة أولى منفصلة المتحولات.

بالمكاملة:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-C}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} + C_1$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C}\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{C}}\right)^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{C}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)^2+1}} + C_1$$

نجري تغيير في المتحول — نجري تغيير في المتحول

$$\frac{y}{\sqrt{C}} = Z \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C}} = dZ \qquad \frac{x}{\sqrt{C}} = t \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{C}} = dt$$

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + C_1$$

نعلم أن: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,ch} x + C$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arc Sh}x + c \qquad -2$$

$$\Rightarrow \quad \text{arc Ch}(z) = \text{arc Sh}(t) + c_1$$

$$\text{arc Ch}\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right) = \text{arc Sh}\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right) + c_1$$

$$\frac{y}{\sqrt{c}} = \text{ch}\left(\text{arc Sh}\frac{x}{\sqrt{c}} + c_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{c}\ \text{ch}\left(\text{arc Sh}\frac{x}{\sqrt{c}} + c_1\right)$$

وهي المنحنيات الحرجة للتابعي J.

تمرين: باستخدام معادلات أولر لاغرانج التفاضلية أوجد منحنيات التوقف للتابعي:

$$J[y] = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (my'^2 - ay^2)\,dx$$

حيث: $m, a = \text{Const} \neq 0$

أ- لنسمي p المتغير المرافق لـ y

$$p = F_{y'} \Rightarrow p = my' \Rightarrow y' = \frac{p}{m}$$

ب- نوجد دالة هاملتون:

$$H(x,y,p) = py' - F(y,y')$$

$$H(x,y,p) = py' - \frac{1}{2}(my'^2 - ay^2)$$

$$H(x,y,p) = p\cdot\frac{p}{m} - \frac{1}{2}\left(m\cdot\frac{p^2}{m^2} - ay^2\right)$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \boxed{H(x,y,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} a y^2}$$

3- معادلات أولر - لاغرانج لقانونية:

$$H_p = y' \Rightarrow \frac{p}{m} = y' \quad \dots (1)$$

$$H_y = -p' \Rightarrow ay = -p' \quad \dots (2)$$

من (1) $p = my'$ بدل في (2) $\Leftarrow ay = -my''$

$$\Rightarrow my'' + ay = 0$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية معادلتها المميزة:

$$\lambda^2 = -\frac{a}{m} \Leftarrow m\lambda^2 + a = 0$$

نميز حالتين:

1- $a.m < 0 \Leftarrow \lambda^2 = -\frac{a}{m} > 0 \Leftarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{a}{m}}$

$$\boxed{y = c_1 e^{\sqrt{-\frac{a}{m}}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\frac{a}{m}}x}}$$

2- $a.m > 0 \Leftarrow \lambda^2 = -\frac{a}{m} < 0 \Leftarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{a}{m}}$

$$\boxed{y = c_1 \cos\sqrt{\frac{a}{m}}x + c_2 \sin\sqrt{\frac{a}{m}}x}$$

WhatsApp : 0997378154
Facebook_Page : IOM
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

دالیات تعتمد على مشتقات ذات مراتب عليا:

سندرس الشروط الضرورية لوجود مخنيات لتوقف لنوعين من الدالیات المعتمدة على مشتقات ذات مراتب عليا.

(P) إذا كان الدالي من الشكل: $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \dots y^{(n)})\, dx$

حيث $y(x) \in D_n$

$y(a) = A_0$ ، $y'(a) = A_1$ ، ..... ، $y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}$

$y(b) = B_0$ ، $y'(b) = B_1$ ، ..... ، $y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$

عندئذ: الشرط الضروري لوجود مخني توقف $y(x)$ والتي قد يكون للدالي $J[y]$ يتم تصوره عليه هو أن تكون $y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(F_{y^{(n)}}\right) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة $2n$ تسمى معادلة أولر. بواسون وحلها العام يحتوي على $2n$ من الثوابت الإختيارية، يمكن تعيينها باستخدام $2n$ من الشروط الحدية المعطاة.

مثال محلول: عالج مسألة القيم التصوري.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2\sin x\right) dx$$

ملاحظة: المسألة المعطاة بدون شروط حدية أي الثوابت لا يمكن تعيينها.

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$F = y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2\sin x$$

معادلة أولر بواسون من الشكل:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الرابعة ذات أمثال ثابتة معادلتها المميزة:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$[(\lambda + i)(\lambda - i)]^2 = 0$$

$\lambda^2 = -1$ "جذر مضاعف"

$\lambda = \pm i$ "كل جذر مكرر مرتين"

ومنه الحل العام من الشكل:

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$$

مثال أوجد مستقيمات لتوقف الدالي:

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)\, dx$$

حيث:

$y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

الحل:

$$F = y''^2 - y^2 + x^2$$

معادلة أولر بواسون تأخذ الشكل:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$-2y - \frac{d}{dx}(0) + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

$$-2y + 2y^{(4)} = 0$$

$$y^{(4)} - y = 0$$

معادلة المميزة:

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$\lambda = \pm 1 \quad , \quad \lambda = \pm i$$

الحل العام:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

وبالتالي:

$$y'(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

لتعيين الثوابت (باستخدام الشروط الحدية):

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 + c_3 \quad \dots (1)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} + c_4 \quad \dots (2)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 - c_2 + c_4 \quad \dots (3)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow -1 = c_1 e^{\pi/2} - c_2 e^{-\pi/2} - c_3 \quad \dots (4)$$

بجمع (1) و (4):

$$(5) \dots \quad 0 = c_1 + c_1 e^{\pi/2} + c_2 - c_2 e^{-\pi/2}$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

نطرح (2) و (3) :

$$0 = C_1 - C_1 e^{\pi/2} - C_2 - C_2 e^{-\pi/2} \quad \dots (6)$$

نجمع (5) و (6) :

$$0 = 2C_1 - 2C_2 e^{-\pi/2} \Rightarrow C_1 = C_2 e^{-\pi/2} \quad \dots (7)$$

نعوض (7) في (5) فنجد :

$$0 = C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 + C_2 - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \xrightarrow{\text{من (7)}} C_1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{من (1)}} C_3 = 1 \xrightarrow{\text{من (3)}} C_4 = 0$$

وبالتالي :

$$y(x) = \cos x$$

أي أن القيم القصوى للتابعي تحصل عليها من أجل التابع الذي معادلته

$$y(x) = \cos x$$

مثال أوجد منحنيات التوقف للتابعي :

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi} (16y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

حيث :

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad , y'(0) = y'(\pi) = 1$$

معادلة أولر يأخذ لهذا التابعي الشكل :

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 0$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$32y - \frac{d}{dx}(0) + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0$$

$$32y - 2y^{(4)} = 0$$

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

معادلة المميزة:

$$\lambda^{(4)} - 16 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+2i)(\lambda-2i) = 0$$

$$\lambda = \mp 2 \quad , \lambda = \mp 2i$$

الحل العام:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

بالتفاضل:

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - 2C_3 \sin 2x + 2C_4 \cos 2x$$

ولتعيين الثوابت (باستخدام الشروط البدئية):

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 + C_3 \quad \dots (1)$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi} + C_3 \quad \dots (2)$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 2C_1 - 2C_2 + 2C_4 \quad \dots (3)$$

$$y'(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = 2C_1 e^{2\pi} - 2C_2 e^{-2\pi} + 2C_4 \quad \dots (4)$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$0 = c_1 + c_2 + c_3 \quad \dots (1)$$

$$0 = c_1 e^{2\pi} + c_2 e^{-2\pi} + c_3 \quad \dots (2)$$

$$\frac{1}{2} = c_1 - c_2 + c_4 \quad \dots (3)$$

$$\frac{1}{2} = c_1 e^{2\pi} - c_2 e^{-2\pi} + c_4 \quad \dots (4)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow c_1 - c_1 e^{2\pi} + c_2 - c_2 e^{-2\pi} = 0 \quad \dots (5)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow c_1 - c_1 e^{2\pi} - c_2 + c_2 e^{-2\pi} = 0 \quad \dots (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow 2c_1 - 2c_1 e^{2\pi} = 0 \Rightarrow c_1 \underbrace{(1 - e^{2\pi})}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$(5) - (6) \Rightarrow 2c_2 - 2c_2 e^{-2\pi} = 0 \Rightarrow c_2 \underbrace{(1 - e^{-2\pi})}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

بالتعويض في (1) نجد: $\boxed{c_3 = 0}$

من (4) نجد: $\boxed{c_4 = \frac{1}{2}}$

بالتالي نعوض الأمثال (الثوابت) في المعادلة نجد:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

ب- إذا كان التابعي من الشكل:

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \dots y^{(n)}, z, z', \dots z^{(m)})\, dx$$

حيث: $y(x), z(x) \in D_n$

1- نجعل $y(x)$ دالة متغيرة ونفرض أن $z(x)$ ثابتة ومن ثم نحصل على:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(F_{y^{(n)}}\right) = 0$$

وبالمثل.

2- نجعل $z(x)$ دالة متغيرة بينما $y(x)$ ثابتة لنحصل على:

$$F_z - \frac{d}{dx}\left(F_{z'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{z''}\right) + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(F_{z^{(m)}}\right)$$

وبالتالي فإن التابعين يحققان نظاماً مكوناً من معادلتين أولى بواسون إحداثيتين.

تعميم: ليكن دراسة دالي يعتمد على أي عدد من الدوال، فإذا كان:

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots y_m(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots y_2^{(n_2)}, \dots y_m, y_m', \dots y_m^{(n_m)})\, dx$$

حيث: $y_i(x) \in D_n$

وكانت إحدى هذه الدوال متغيرة ولتكن $y_i(x)$ وفرضنا أن الدوال الأخرى ثابتة فإننا نحصل على شرط اللازم لوجود القيم القصوى للدالي

Scanned by CamScanner

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_i''}\right) + \dots + (-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}\left(F_{y_i^{(n_i)}}\right)$$

و $i = \overline{1,m}$

مثال محلول أوجد منحنيات لتوقف الدالي :

$$J[y,z] = \int_a^b \left[y''^2 + y'^2 - y^2 + z'^2 + z''^2\right] dx$$

الحل:

$$F = y''^2 + y'^2 - y^2 + z'^2 + z''^2$$

أ- بفرض $y(x)$ دالة متغيرة و $z(x)$ ثابتة نجد معادلة أولر بواسون

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) = 0$$

$$-2y - \frac{d}{dx}(1) + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

$$-2y + 2y^{(4)} = 0 \Rightarrow y^{(4)} - y = 0$$

معادلتي المميزة :

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$$

$\lambda = \pm 1$ ، $\lambda = \pm i$

حل العام :

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

ب- بفرض $z(x)$ دالة متغيرة و $y(x)$ ثابتة.

نجد معادلة أولر بواسون :

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{z''}) = 0$$

$$-2z'' + 2z^{(4)} = 0$$

$$\Rightarrow z^{(4)} - z'' = 0$$

معادلة المميزة: $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1) = 0$$

أولاً: جذر مضاعف $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

أو: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

الحل العام:

$$z(x) = b_1 + b_2 x + b_3 e^x + b_4 \bar{e}^x$$

حالات شروط إضافية:

قد تتطلب بعض المسائل أن يكون لتكامل ما زاوية قصوى أو صغرى بتكامل آخر أو شروط إضافية على نفس المتغيرات ثابتة فإذا كان:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

$$y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

$$k[y] = \int_a^b G(x, y, y')\,dx = L \quad ; \quad L = \text{ثابتة}$$

وكانت $y = y(x)$ حيث قصوى للدالي $J[y]$

بينما $y(x)$ ليست حيث قصوى للدالي $k[y]$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

فيوجد ثابت λ بحيث أن $y(x)$ تحقق قاعدة المالي:

$S[y]=\int_a^b (F+\lambda G)\,dx$ حيث λ مضاعف لاغرانج.

وهنا يعني أن $y(x)$ تحقق معادلة أولر لاغرانج التالية:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \lambda\left[G_y - \frac{d}{dx}(G_{y'})\right] = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها العام من الشكل:

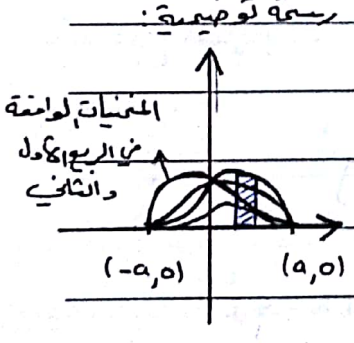
$$y = y(x, c_1, c_2, \lambda)$$

ولتحديد الثابت نستعين من الشروط البدئية المعروفة ومن المالي k.

مثال محلول (مسألة ذات المحيط المعلوم):

من بين جميع المنحنيات المتصلة في الربع الأول والثاني والتي طول كل منها L ويمر بالنقطتين $(a,0)$ و $(-a,0)$، أوجد ذلك المنحنى الذي يكون مع المقطع $[-a,a]$ أكبر مساحة ممكنة.

رسمة توضيحية:



الحل: لإيجاد المنحنى $y(x)$ الذي يجعل التابع $J[y]=\int_{-a}^{+a} y\,dx$ أكبر قيمة ممكنة

العرض الطول

مساحة المستطيل

بشرط أن: $y(a)=y(-a)=0$

$$k[y]=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L \quad \Rightarrow \text{(طول المنحنى)}$$

نتأمن التابع: $S[y]=J[y]+\lambda\,k[y]$ و λ ثابت

("مضاعف لاغرانج")

Scanned by CamScanner

$$\delta[y] = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda \sqrt{1+y'^2} \right) dx$$

معادلة أولر . λ غرانج لهذا المثال تكتب بالشكل:

$$\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0$$

وصيغ: $F = y \quad \wedge \quad G = \sqrt{1+y'^2}$

$$1 - \frac{d}{dx}(0) + \lambda \left(0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} \right) \right) = 0$$

$$1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

بالمكاملة:

$$x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

$$(x - c_1) = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بتربيع الطرفين:

$$(x-c_1)^2 = \frac{\lambda^2 y'^2}{(1+y'^2)}$$

$$\Rightarrow (x-c_1)^2 (1+y'^2) = \lambda^2 y'^2$$

$$\left[\lambda^2 - (x-c_1)^2 \right] y'^2 = (x-c_1)^2$$

$$y'^2 = \frac{(x-c_1)^2}{\left[\lambda^2 - (x-c_1)^2 \right]}$$

بالجذر:

$$(*) \ldots \quad y' = \frac{(x-c_1)}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}}$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{-2(x-c_1)}{2\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}\right)$$

$$dy = -\left(\frac{-2(x-c_1)}{2\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}\right)dx$$

نكامل:

$$\int dy = -\int \frac{-2(x-c_1)}{2\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}\,dx$$

$$y = -\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2} + \frac{c}{2}$$

$$y - c_2 = -\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}$$

نربع الطرفين:

$$(y-c_2)^2 = \lambda^2 - (x-c_1)^2$$

$$\Rightarrow (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2 \quad \dots (**)$$

وتمثل أسرة دوائر مركزها (c_1, c_2) ، نصف قطرها λ

ولتعيين قيم λ ، c_2 ، c_1 من الشروط:

$$K[y] = L \quad , \quad y(a) = y(-a) = 0$$

$$y(a) = 0 \Rightarrow (a-c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \quad \dots (1)$$

$$y(-a) = 0 \Rightarrow (a+c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \quad \dots (2)$$

بالطرح (2) - (1)

$$(a+c_1)^2 - (a-c_1)^2 = 0$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow (a^2+2ac_1+c_1^2)-(a^2-2ac_1+c_1^2)=0$$

$$4ac_1=0 \Rightarrow c_1=0 \quad \dots(3)$$

من الشرط $k[y]=L_1$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx \xrightarrow{\text{بالاستفادة من 3 و 4}} \int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{\lambda^2-x^2}}\,dx=L_1$$

"هذا التابع زوجي وبالتالي المجال متناظر نأخذ نصفه للتكامل"

$$2\int_{a}^{a}\sqrt{\frac{\lambda^2-x^2+x^2}{\lambda^2-x^2}}\,dx=L_1$$

$$2\int_{0}^{a}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2-x^2}}\,dx=L_1$$

$$2\lambda\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\,dx=L_1$$

$$\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}=\frac{L}{2\lambda} \Rightarrow \int_{0}^{a}\frac{dx}{\lambda\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}}=\frac{L}{2\lambda}$$

نجري التحويل:

$$\frac{x}{\lambda}=t$$

$$\frac{dx}{\lambda}=dt$$

Scanned by CamScanner

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=a \Rightarrow t=\frac{a}{\lambda}$$

$$2\lambda \int_0^{\frac{a}{\lambda}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = L_1$$

$$\Rightarrow 2\lambda \left[\arcsin t\right]_0^{\frac{a}{\lambda}} = L_1$$

$$\Rightarrow 2\lambda \left[\arcsin \frac{a}{\lambda}\right] = L_1$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{L_1}{2\lambda} \Rightarrow \frac{a}{\lambda} = \sin \frac{L_1}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \lambda . \sin \frac{L_1}{2\lambda}}$$

من (1):

$$\left(\lambda . \sin \frac{L_1}{2\lambda} - o\right)^2 + c_2^2 = \lambda^2$$

$$c_2^2 = \lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 \frac{L_1}{2\lambda} = \lambda^2 \left(1 - \sin^2 \frac{L_1}{2\lambda}\right)$$

$$c_2^2 = \lambda^2 . \cos^2 \frac{L}{2\lambda}$$

$$\boxed{c_2 = \lambda . \cos \frac{L_1}{2\lambda}}$$

بتبديل الثوابت في (**) نحصل

$$\boxed{x^2 + \left(y - \lambda \cos \frac{L_1}{\lambda}\right)^2 = \lambda^2}$$

وهو المطلوب..

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

مثال محلول: أوجد منحني التوقف (المنحني الحرج) للدالي:

$$J[y]=\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

حيث: $K[y]=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx=2L$ ، $y(-a)=y(a)=b$

بداية: نتذكر بالحالة الخاصة:

$$J[y]=\int_{a}^{b} F(y,y')\,dx$$

من هذه الحالة معادلة أولر. الآن نجد:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=F_y-F_{y'y}\cdot y'-F_{y'y'}\cdot y''=0$$

والآن نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=F_y\cdot y'+F_{y'}\cdot y''-y'\cdot F_{y'y}\cdot y'$$

$$-y'F_{y'y'}\cdot y''-y''F_{y'}$$

$$=\left(F_y-F_{y'y'}\cdot y''-F_{y'y}\cdot y'\right)y'=0$$

لذا:

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'\cdot F_{y'}\right)=0$$

وهو حل لمعادلة أولر. الآن طالما $y'\neq 0$ وبالتالي بالمكاملة:

$$F-y'F_{y'}=C$$

الحل: علماً أن:

$$S[y]=J[y]+\lambda K[y]$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
Scanned by CamScanner

$$S[y] = \int_{-a}^{a} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$H = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

معادلة أولر. لاغرانج: $\frac{H}{y} - \frac{d}{dx}\left(H_{y'}\right) = 0$

وإنّ H تابع لـ (y, y') وهي الحالة الخاصة وبالتالي:

$$\frac{d}{dx}\left(H - H_{y'}\cdot y'\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left((y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - (y+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot y'\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(y+\lambda)(1+y'^2) - (y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0$$

إذاً:

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$c^2(1+y'^2) = (y+\lambda)^2$$

$$c^2 + c^2 y'^2 = (y+\lambda)^2$$

$$c^2 y'^2 = (y+\lambda)^2 - c^2$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$y'^2 = \frac{(y+\lambda)^2 - c^2}{c^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c} \quad \dots (I)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \frac{dx}{c} \Rightarrow \frac{dy}{c\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}} = \frac{dx}{c}$$

نفرض: $\frac{y+\lambda}{c} = z \Rightarrow \frac{dy}{c} = dz$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{x}{c} + e$$

$$\text{arc ch } z = \frac{x}{c} + e$$

$$\text{arc ch}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = \frac{x}{c} + e$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = ch\left(\frac{x}{c} + e\right) \quad *'$$

$$y = c \cdot ch\left(\frac{x}{c} + e\right) - \lambda \quad *$$

وهي معادلة المنحني المطلوب ويبقى علينا تعيين الثوابت e, c علماً أنّ المنحني متناظر حول محور التراتيب فإنّ $e = 0$ وبالتالي:

$$y = c \cdot ch\left(\frac{x}{c}\right) - \lambda$$

Scanned by CamScanner

تفسير ذلك !!

لدينا: $y(a) = y(-a) = b$

نعوض في (*):

$$b = c.ch\left(\frac{a}{c} + e\right) - \lambda$$

$$b = c.ch\left(\frac{-a}{c} + e\right) - \lambda$$

ولكن نعلم أنّ: $ch(x) = ch(-x)$

$$\Rightarrow b = c.ch\left(\frac{-a}{c} - e\right) - \lambda$$

وبالتالي:

$$\frac{-a}{c} + e = \frac{-a}{c} - e \Rightarrow 2e = 0 \Rightarrow e = 0$$

الآن لدينا:

$$2I_1 = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, .dx$$

ومن I نجد:

$$2I_1 = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{(y+\lambda)^2 - c^2}{c^2}}\, .dx$$

$$2I_1 = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{(y+\lambda)^2}{c^2}}\, .dx$$

$$2I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{y+\lambda}{c}\, .dx$$

$$2L = \int_{-a}^{a} ch\left(\frac{x}{c}\right) dx \Rightarrow 2I_1 = 2\int_{0}^{a} ch\left(\frac{x}{c}\right) dx$$ (من (*))

$$I_1 = \left[c.Sh\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^a = c.Sh\left(\frac{a}{c}\right)$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\frac{L_1}{c} = Sh\left(\frac{a}{c}\right) \quad \dots (1)'$$

وعن x'

$$\frac{b+\lambda}{c} = ch\left(\frac{a}{c}\right) \quad \dots (2)'$$

نعلم أنّ:

$$ch^2 - Sh^2 = 1$$

$$\frac{(b+\lambda)^2}{c^2} - \frac{L^2}{c^2} = 1$$

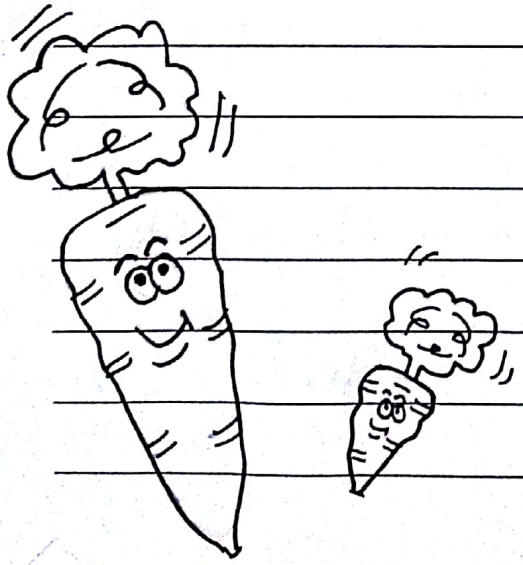
$$c^2 = (b+\lambda)^2 - L^2 \Rightarrow c = \sqrt{(b+\lambda)^2 - L^2}$$

نعوض في المعادلة فنجد:

$$y = \sqrt{(b+\lambda)^2 - L^2} \cdot ch\left(\frac{x}{\sqrt{(b+\lambda)^2 - L^2}}\right) - \lambda$$

انتهت المحاضرة الأخيرة ... ♡

إعداد: إلياس دليل



وبذلك نكون قد أنهينا مقرر المعادلات التكاملية وحساب التحولات، نرجو من الله أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا المقرر بطريقة سهلة ومفهومة وخالية من الأخطاء ...

لا تنسونا من دعوة صالحة ... ♥

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner